• A. Wagiyo • Sri Mulyono • Susanto

Pegangan Belajar Matematika

3

untuk SMP/MTs Kelas IX

PUSAT PERBUKUAN
Departemen Pendidikan Nasional

• A. Wagiyo • Sri Mulyono • Susanto

BUKU SEKOLAH bse ELEKTRONIK

Pegangan Belajar
Matematika

3

untuk SMP/MTs Kelas IX

PUSAT PERBUKUAN
Departemen Pendidikan Nasional

Pegangan Belajar
MATEMATIKA 3

Untuk SMP/MTs Kelas IX

Penulis	:	A. Wagiyo Sri Mulyono Susanto
Editor Naskah	:	Dian Pramani dan Suharyati
Ilustrasi, Tata Letak	:	Herman Sriwijaya, Tim Kreatif
Perancang Kulit	:	Oric Nugroho Jati
Sumber kulit	:	www.titanic-quarter.com dan Dokumen penerbit

Ukuran Buku : 21 x 29,7 cm

510.07
WAG WAGIYO, A
p Pegangan belajar matematika 3 : untuk SMP/MTs kelas IX/
A Wagiyo, Sri Mulyono, Susanto ; editor Dian Pramani, Suharyati
— Jakarta : Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional, 2008.
ix, 212 hlm. ; ilus. ; 29 Cm.
Bibliografi : hlm.200, Indeks.
ISBN 979-462-883-2

1. Matematika-Studi dan Pengajaran I. Judul II. Mulyono, Sri
III. Susanto IV. Paramani, Dian V. Suharyati

Diterbitkan oleh Pusat Perbukuan
Departemen Pendidikan Nasional
Tahun 2008

Diperbanyak oleh ...

Kata Sambutan

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT, berkat rahmat dan karunia-Nya, Pemerintah, dalam hal ini, Departemen Pendidikan Nasional, pada tahun 2008, telah membeli hak cipta buku teks pelajaran ini dari penulis/penerbit untuk disebarluaskan kepada masyarakat melalui situs internet (*website*) Jaringan Pendidikan Nasional.

Buku teks pelajaran ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan dan telah ditetapkan sebagai buku teks pelajaran yang memenuhi syarat kelayakan untuk digunakan dalam proses pembelajaran melalui Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 34 Tahun 2008.

Kami menyampaikan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada para penulis/penerbit yang telah berkenan mengalihkan hak cipta karyanya kepada Departemen Pendidikan Nasional untuk digunakan secara luas oleh para siswa dan guru di seluruh Indonesia.

Buku-buku teks pelajaran yang telah dialihkan hak ciptanya kepada Departemen Pendidikan Nasional ini, dapat diunduh (*down load*), digandakan, dicetak, dialihmediakan, atau difotokopi oleh masyarakat. Namun, untuk penggandaan yang bersifat komersial harga penjualannya harus memenuhi ketentuan yang ditetapkan oleh Pemerintah. Diharapkan bahwa buku teks pelajaran ini akan lebih mudah diakses sehingga siswa dan guru di seluruh Indonesia maupun sekolah Indonesia yang berada di luar negeri dapat memanfaatkan sumber belajar ini.

Kami berharap, semua pihak dapat mendukung kebijakan ini. Kepada para siswa kami ucapkan selamat belajar dan manfaatkanlah buku ini sebaik-baiknya. Kami menyadari bahwa buku ini masih perlu ditingkatkan mutunya. Oleh karena itu, saran dan kritik sangat kami harapkan.

Jakarta, Juli 2008
Kepala Pusat Perbukuan

Kata Pengantar

Mata pelajaran matematika secara mendasar mempunyai tujuan agar peserta didik memiliki kemampuan sebagai berikut.

1. Memahami konsep matematika, menjelaskan keterkaitan antarkonsep dan mengaplikasikan konsep atau algoritma secara luwes, akurat, efisien, dan tepat dalam pemecahan masalah.
2. Menggunakan penalaran pada pola dan sifat, melakukan manipulasi matematika dalam membuat generalisasi, menyusun bukti, atau menjelaskan gagasan dan pernyataan matematika.
3. Memecahkan masalah yang meliputi kemampuan memahami masalah, merancang model matematika, menyelesaikan model dan menafsirkan solusi yang diperoleh.
4. Mengkomunikasikan gagasan dengan simbol, tabel, diagram, atau media lain untuk memperjelas keadaan atau masalah.
5. Memiliki sikap menghargai kegunaan matematika dalam kehidupan, yaitu memiliki rasa ingin tahu, perhatian, dan minat dalam mempelajari matematika, serta sikap ulet dan percaya diri dalam pemecahan masalah.

Sebagai penunjang agar apa yang diharapkan dalam standar Isi tercapai, maka Tim Matematika SMP menyusun buku **Pegangan Belajar Matematika Untuk SMP kelas IX** berdasarkan Standar Isi.

Buku Pegangan Belajar Matematika SMP 3 ini memberikan penjelasan teori secara rinci yang disajikan dengan bahasa yang sederhana, sehingga mudah dipahami. Selain itu, dalam buku ini juga diberikan latihan-latihan yang banyak dan bervariasi serta lengkap dengan gambar-gambar, grafik, dan tabel beserta penjelasan yang detail. Dengan bantuan buku ini, siswa diharapkan makin memahami suatu teori tertentu dan termotivasi untuk belajar terus-menerus serta terlatih dalam memahami soal yang berkaitan dengan kehidupan sehari-hari.

Dalam menyusun buku ini, kami mengacu pada buku-buku matematika, baik terbitan dalam negeri maupun buku terbitan luar negeri.

Akhirnya, kami mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyusunan buku ini, terutama kepada Penerbit PT Galaxy Puspa Mega yang telah berkenan menerbitkan karya kami. Kritik dan saran dari pembaca demi kesempurnaan buku ini akan kami terima dengan hati terbuka. Semoga buku ini berguna bagi siswa maupun guru dalam meningkatkan mutu pendidikan di Indonesia.

Jakarta, Maret 2008

Tim Penyusun Pegangan Belajar Matematika SMP

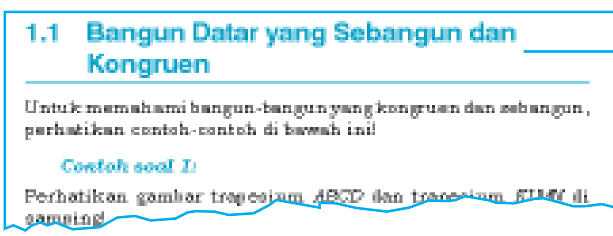
Petunjuk Penggunaan Buku

Judul bab. Setiap awal pembahasan materi terdapat urutan dan judul bab.

Sebelum masuk ke pembahasan materi ada gambar pembuka.

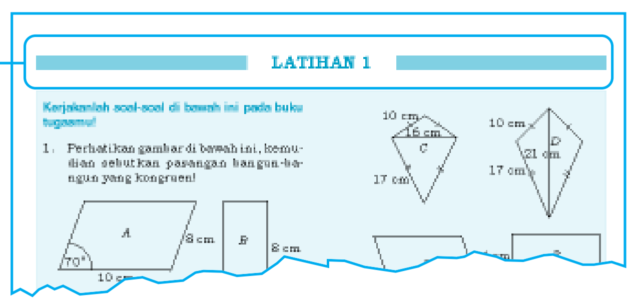
Pendahuluan tiab bab agar siswa mendapat gambaran materi yang akan dibahas di dalam bab ini dan juga keterangan yang ada pada gambar.

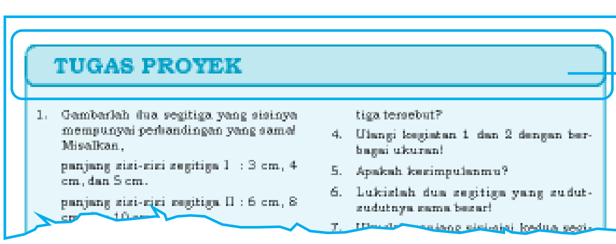
Diskusi pembuka untuk membantu siswa mengenal dan memahami materi apa yang akan dibahas.



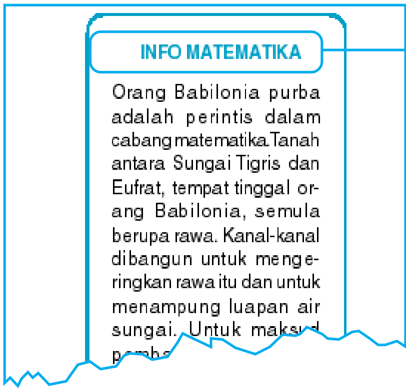
Subbab yaitu urutan materi yang akan dibahas.

Latihan setelah pembahasan materi dalam subbab atau subsubbab selesai.





Tugas proyek berisi kegiatan yang harus dilakukan oleh siswa berkaitan dengan materi yang sudah dibahas.


INFO MATEMATIKA

Orang Babilonia purba adalah perintis dalam cabang matematika. Tanah antara Sungai Tigris dan Eufrat, tempat tinggal orang Babilonia, semula berupa rawa. Kanal-kanal dibangun untuk mengeringkan rawa itu dan untuk menampung luapan air sungai. Untuk maksud

Info metematika adalah informasi seputar matematika yang bisa disajikan untuk menambah pengetahuan para siswa.

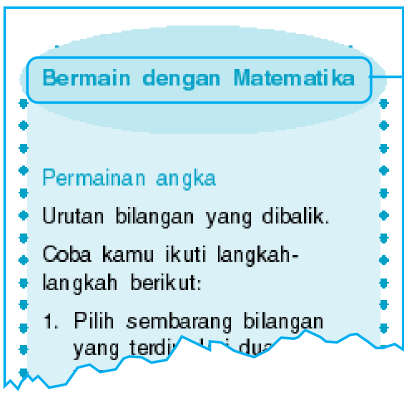

Diskusi

Salin dan lengkapilah tabel berikut! Kerjakanlah dengan temanmu dalam satu kelompok.

No	Tabung 1 r_1	Tabung 1 t_1	Tabung 2 r_2	Tabung 2 t_2	V_1	V_2	$V_1 : V_2$
1	2 cm	5 cm	3 cm	5 cm			
2	3 cm	6 cm	4 cm	6 cm			
3	4 cm	8 cm	5 cm	8 cm			
4	5 cm	10 cm	6 cm	10 cm			
5	6 cm	15 cm	7 cm	15 cm			

Apakah ada relasi antara perbandingan $r_1 : r_2$ dengan perbandingan $V_1 : V_2$ dari jawaban soal nomor 1 sampai dengan 5 di atas? Jika ada, berilah kesimpulan tentang relasi tersebut!

Diskusi berisi kegiatan yang dapat dikerjakan dalam kelompok.


Bermain dengan Matematika

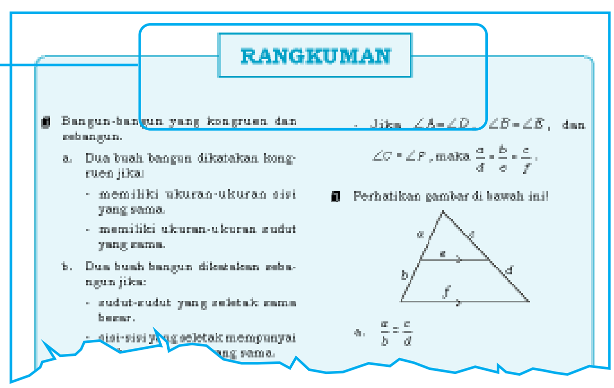
Permainan angka

Urutan bilangan yang dibalik.

Coba kamu ikuti langkah-langkah berikut:

1. Pilih sembarang bilangan yang terdiri dari dua

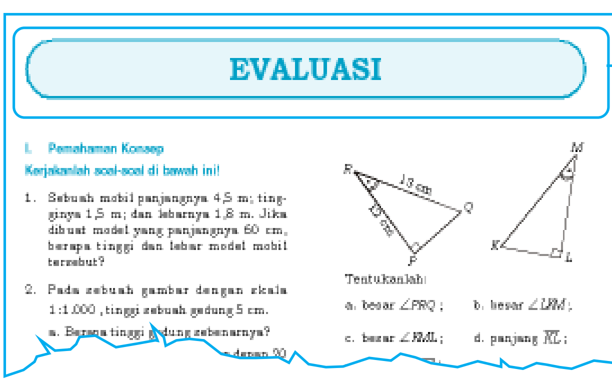
Permainan matematika yang berhubungan dengan materi yang sedang dibahas.


RANGKUMAN

- Bangun-bangun yang kongruen dan sebangun.
  a. Dua buah bangun dikatakan kongruen jika:
     - memiliki ukuran-ukuran sisi yang sama.
     - memiliki ukuran-ukuran sudut yang sama.
  b. Dua buah bangun dikatakan sebangun jika:
     - sudut-sudut yang seletak sama besar.
     - sisi-sisi yang seletak mempunyai ... yang sama.
  - Jika $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, dan $\angle C = \angle F$, maka $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$.
- Perhatikan gambar di bawah ini!

a. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Berisi hal-hal yang penting dan harus diingat oleh siswa.


EVALUASI

I. Pemahaman Konsep

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini!

1. Sebuah mobil panjangnya 4,5 m; tingginya 1,5 m; dan lebarnya 1,8 m. Jika dibuat model yang panjangnya 60 cm, berapa tinggi dan lebar model mobil tersebut?
2. Pada sebuah gambar dengan skala 1 : 1.000, tinggi sebuah gedung 5 cm.
   a. Berapa tinggi gedung sebenarnya?

Tentukanlah:

a. besar $\angle PRQ$; b. besar $\angle LKM$; c. besar $\angle KML$; d. panjang $\overline{KL}$;

Evaluasi adalah latihan akhir yang diberikan kepada siswa, setelah pembahasan satu bab selesai. Evaluasi ini diberikan untuk mengukur sampai seberapa jauh siswa ini dapat menguasai dan memahami materi yang sudah dipelajari

Daftar Isi

Bab 5
Bilangan Berpangkat

Bab 6
Barisan dan Deret Bilangan

Bab 7
Persamaan dan Fungsi Kuadrat (Pengayaan)

Daftar Simbol

Notasi	Keterangan
+	Jumlah; tambah; menambah, positif
	Kurang; mengurang; negatif
	Kali; mengali; penyilangan
:	Bagi; membagi
	Sama dengan
	Tidak sama dengan
	a dibagi *b*; pembagian
	a pangkat *n*
	Kurung biasa
	Kurung siku
	Kurung kurawal; menyatakan himpunan; akolade
	Elemen dari; anggota dari
	Bukan elemen dari; bukan anggota dari
	Banyak anggota *A*
	Sigma
	Phi
	Lebih dari
	Kurang dari
	Lebih dari atau sama dengan
	Kurang dari atau sama dengan
	Himpunan yang beranggota *a*
	Segitiga
	Tegak lurus
	Derajat
∟ ┐	Siku-siku
	Sejajar
	Sudut
	Ruas garis *AB*
	Ekuivalen, jika dan hanya jika
%	Persen
	Pendekatan atau kira-kira
	Akar pangkat dua
$\sqrt[n]{\ }$	Akar pangkat *n*

Bab 1

Kesebangunan

(a)

(b)

Gambar 1.1

Gambar (a) dan (b) adalah sebangun

Sumber: Tempo 29 Agustus - 4 September 2005

Dalam kehidupan sehari-hari, kita sering melihat benda-benda yang mempunyai bentuk-bentuk yang sama. Dari benda-benda yang memiliki bentuk sama itu ada yang ukurannya sama, ada juga yang memiliki ukuran berbeda.

Coba kamu perhatikan kedua gambar di atas! Kedua gambar di atas mempunyai bentuk yang sama tetapi ukurannya berbeda. Kedua gambar tersebut dikatakan sebangun. Rumah-rumah pada masing-masing gambar mempunyai bentuk dan ukuran yang sama. Rumah-rumah tersebut dikatakan kongruen. Selain contoh di atas, masih banyak contoh lainnya yang dapat kamu temukan.

Pada bab pertama ini, kita akan membahas tentang kesebangunan. Materi yang akan kita pelajari antara lain bangun datar yang sebangun dan kongruen, sifat-sifat dua segitiga sebangun dan kongruen, penerapan kesebangunan.

Diskusi Pembuka

1. Sebutkan benda-benda di sekitarmu yang mempunyai bentuk sama!
2. Sebutkan benda-benda di sekitarmu yang mempunyai bentuk sama tetapi ukuran berbeda!
3. Sebutkan benda-benda di sekitarmu yang mempunyai bentuk dan ukuran sama!

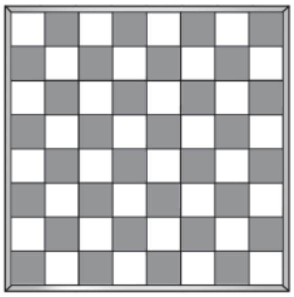
Kita dapat menggolongkan beberapa benda yang ada di sekitar kita ke dalam dua kelompok, yaitu:

1. Kelompok benda dengan ukuran dan bentuk yang sama.

   Contoh:

   a) Ubin-ubin pada lantai rumah.
   b) Persegi-persegi pada papan catur.
   c) Batu bata-batu bata untuk membuat rumah.

   Coba kamu cari benda di sekitarmu yang mempunyai bentuk dan ukuran sama!



Gambar 1.2
Persegi-persegi pada papan catur

2. Kelompok benda dengan bentuk sama tetapi ukuran berbeda.

   Contoh:

   a) Papan triplek berbentuk persegi panjang dengan ukuran berbeda-beda, misalnya: $210 \text{ cm} \times 90 \text{ cm}$, $210 \text{ cm} \times 120 \text{ cm}$, $210 \text{ cm} \times 150 \text{ cm}$, dan lain-lain.
   b) Rumah dengan maketnya.
   c) Candi dengan miniaturnya.
   d) Orang dengan fotonya.

Contoh 2a) bentuk benda sama yaitu persegi panjang sedangkan ukuran sisi yang bersesuaian berbeda, perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian juga berbeda.

Contoh 2b), 2c), dan 2d) bentuk sama dan ukuran sisi yang bersesuaian mempunyai perbandingan yang sama.

Pada bab ini, kita akan mempelajari benda-benda atau bangun-bangun:

(1) dengan bentuk sama dan ukuran sisi yang bersesuaian sama, yang sering disebut sama dan sebangun (kongruen).

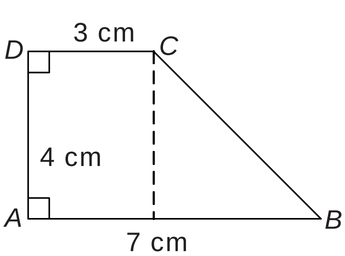
(2) dengan bentuk sama, tetapi ukuran-ukuran sisi yang bersesuaian mempunyai perbandingan yang sama, yang disebut sebangun.

1.1 Bangun Datar yang Sebangun dan Kongruen

Untuk memahami bangun-bangun yang kongruen dan sebangun, perhatikan contoh-contoh di bawah ini!

Contoh soal 1:

Perhatikan gambar trapesium $ABCD$ dan trapesium $KLMN$ di samping!



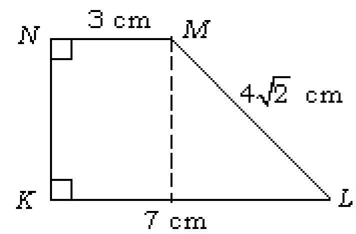
Gambar 1.3
Trapesium *ABCD*

Pada trapesium $ABCD$, panjang BC dapat dihitung sebagai berikut.

$$BC^2 = 4^2 + (7-3)^2$$
$$\Leftrightarrow \quad BC^2 = 16 + 16$$
$$\Leftrightarrow \quad BC^2 = 32$$
$$\Leftrightarrow \quad BC = 4\sqrt{2}$$

Pada trapesium $KLMN$, panjang KN dapat dihitung sebagai berikut.

$$KN^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2 - (7-3)^2$$
$$\Leftrightarrow KN^2 = 32 - 16$$
$$\Leftrightarrow KN^2 = 16$$
$$\Leftrightarrow KN = 4$$



Gambar 1.4
Trapesium $KLMN$

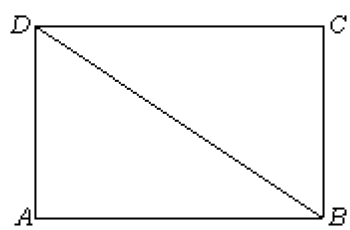
Pada trapesium $ABCD$ tampak bahwa $\angle B = 45°$. Maka $\angle C = 180° - 45° = 135°$. Sedangkan pada trapesium $KLMN$, $\angle L = 45°$ dan $\angle M = 135°$. Kalau kita perhatikan dengan seksama, kedua trapesium itu mempunyai ukuran sisi-sisi yang bersesuaian yang sama dan mempunyai ukuran sudut-sudut yang bersesuaian yang sama. Hal ini dika-takan bahwa:

Trapesium $ABCD$ kongruen dengan trapesium $KLMN$. Atau, sering ditulis $ABCD \cong KLMN$.

Tahukah kalian alasan mengapa $\angle C = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$?

Contoh soal 2:

Perhatikan gambar persegi panjang $ABCD$ di samping ini! Apakah $\Delta ABD \cong \Delta BCD$?



Gambar 1.5
Persegi panjang $ABCD$

Jawab:

$AD = BC$ (sifat persegi panjang)

$AB = DC$ (sifat persegi panjang)

$BD = DB$ (berimpit)

$\angle A = \angle C = 90°$

$\angle ABD = \angle BDC$ (sudut dalam berseberangan)

$\angle ADB = \angle DBC$ (sudut dalam berseberangan)

Jadi, ΔABD dan ΔBCD memiliki ukuran sisi sama dan ukuran sudut-sudutnya pun sama.

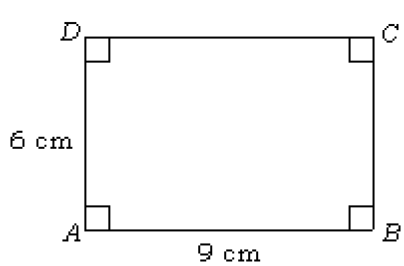
Jadi, $\Delta ABD \cong \Delta BCD$.

Berdasarkan contoh soal 1 dan contoh soal 2, dapat disimpulkan bahwa dua buah bangun dikatakan kongruen jika memenuhi syarat:

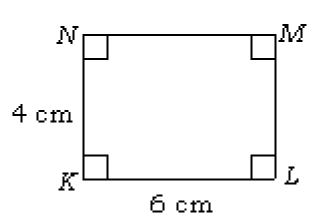
1) memiliki ukuran-ukuran sisi yang bersesuaian yang sama; dan
2) memiliki ukuran-ukuran sudut yang bersesuaian yang sama.

Contoh soal 3:

Sekarang, perhatikan kedua gambar persegi panjang $ABCD$ dan $KLMN$ di bawah ini!



Gambar 1.6
Persegi panjang $ABCD$



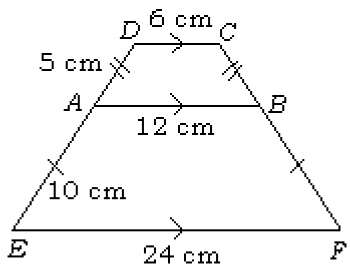
Gambar 1.7
Persegi panjang $KLMN$

Perhatikan gambar 1.6 dan 1.7!

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D =$

$\angle K = \angle L = \angle M = \angle N$

Kalau kita perhatikan, kedua persegi panjang itu memiliki sudut-sudut yang sama. Sedangkan, lebarnya berbanding 6 : 4 = 3 : 2 dan panjangnya berbanding 9 : 6 = 3 : 2. Jadi, *ABCD* dan *KLMN* mempunyai ukuran sudut-sudut yang sama dan ukuran sisinya yang bersesuaian mempunyai perbandingan yang sama, yaitu 3 : 2. Hal ini dikata-kan *ABCD* ~ *KLMN* (dibaca *ABCD* sebangun dengan *KLMN*).



Gambar 1.8
Trapesium *EFCD*

Contoh soal 4:

Apakah *ABCD* ~ *ABFE* pada gambar di samping ini sebangun?

Jawab:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{DA}{AE} &= \frac{5}{10} = \frac{1}{2}\\
\frac{DC}{AB} &= \frac{6}{12} = \frac{1}{2}\\
\frac{BC}{BF} &= \frac{5}{10} = \frac{1}{2}\\
\frac{AB}{EF} &= \frac{12}{24} = \frac{1}{2}
\end{aligned}\right\}\ \text{sisi-sisinya mempunyai perbandingan yang sama.}$$

Berdasarkan contoh soal 3 dan contoh soal 4, dapat disimpulkan bahwa dua buah bangun dikatakan sebangun jika memenuhi syarat-syarat:

1) sudut-sudut yang bersesuaian sama besar; dan
2) sisi-sisi yang bersesuaian mempunyai perbandingan sama.

Sekarang, perhatikan sudut-sudutnya!

$$\left.\begin{aligned}
\angle ADC &= \angle EAB \ \text{(sudut sehadap)}\\
\angle DCB &= \angle ABF \ \text{(sudut sehadap)}\\
\angle DAB &= \angle AEF \ \text{(sudut sehadap)}\\
\angle ABC &= \angle EFB \ \text{(sudut sehadap)}
\end{aligned}\right\}\ \text{sudut-sudutnya sama besar.}$$

Jadi, *ABCD* ~ *ABFE* .

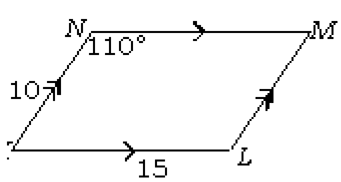
Contoh soal 5:

Apakah kedua bangun jajargenjang *KLMN* dan *PQRS* sebangun?

Jawab:

Perhatikan sisinya!

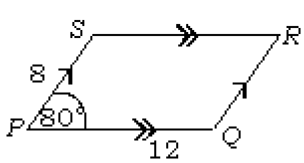
$$\left.\begin{aligned}
\frac{KN}{PS} &= \frac{10}{8} = \frac{5}{4}\\
\frac{KL}{PQ} &= \frac{15}{12} = \frac{5}{4}
\end{aligned}\right\}\ \text{sisi-sisinya mempunyai perbandingan sama.}$$



Gambar 1.9
Jajargenjang *KLMN*

Sekarang, perhatikan sudut-sudutnya!

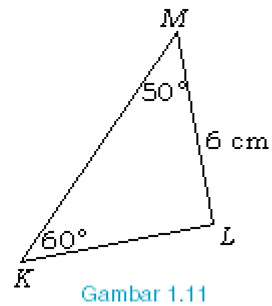
$$\left.\begin{aligned}
&\text{Pada } KLMN:\\
&\angle K = 180° - 110° = 70°\\
&\angle M = \angle K = 70°\\
&\angle L = \angle N = 110°\\
&\text{Pada } PQRS:\\
&\angle S = 180° - 80° = 100°\\
&\angle Q = \angle S = 100°\\
&\angle R = \angle P = 80°
\end{aligned}\right\}\ \text{sudut-sudut yang bersesuaian tidak sama besar.}$$



Gambar 1.10
Jajargenjang *PQRS*

Jadi, *KLMN* tidak sebangun dengan *PQRS*.

Contoh soal 6:



Gambar 1.11
Segitiga *KLM*

Perhatikan ΔABC dan ΔKLM pada gambar di samping!

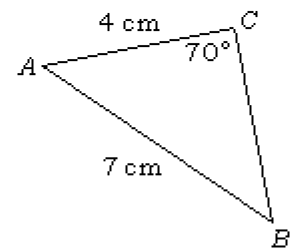
Diketahui $\Delta ABC \cong \Delta KLM$, tentukanlah:

a) besar $\angle L$, $\angle A$, dan $\angle B$!

b) panjang *KM* dan *KL*!

c) panjang *BC*!

Jawab:



Gambar 1.12
Segitiga *ABC*

Diketahui: $\Delta KLM \cong \Delta ABC$

a) $\angle L = 180° - 50° - 60° = 70°$

$\angle A = \angle K = 60°$

$\angle B = \angle M = 50°$

b) $KM = AB = 7$ cm (terletak di depan sudut $70°$)

$KL = AC = 4$ cm

c) $BC = 6$ cm

Pada contoh soal 6, dapat dilihat bahwa:

$$\left.\begin{aligned} \angle K &= \angle A \\ \angle L &= \angle C \\ \angle M &= \angle B \end{aligned}\right\} \text{sudut-sudutnya sama.}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{KM}{AB} &= \frac{7}{7} = \frac{1}{1} \\ \frac{KL}{AC} &= \frac{4}{4} = \frac{1}{1} \\ \frac{ML}{BC} &= \frac{6}{6} = \frac{1}{1} \end{aligned}\right\} \text{sisi-sisi yang bersesuaian sebanding, yaitu } \frac{1}{1}.$$

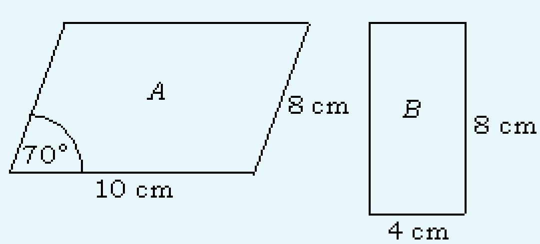
Berdasarkan contoh soal 6, dapat disimpulkan bahwa:

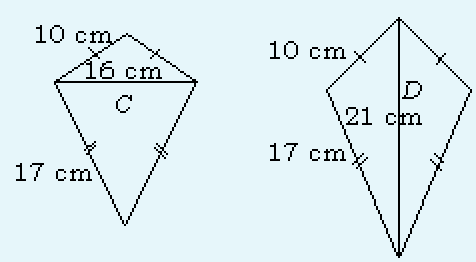
Jika dua buah bangun kongruen maka kedua bangun itu pasti sebangun, tetapi tidak sebaliknya.

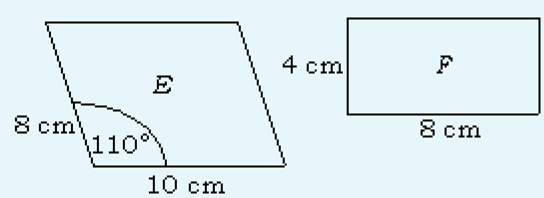
LATIHAN 1

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

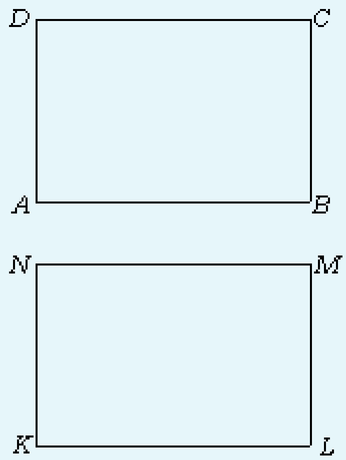
1. Perhatikan gambar di bawah ini, kemudian sebutkan pasangan bangun-bangun yang kongruen!







2. Perhatikan gambar kedua persegi panjang di bawah ini!



Jika $AB = 12$ cm, $BC = 5$ cm, $LM = 5$ cm, dan $KM = 13$ cm maka buktikan bahwa:

a. luas $ABCD$ = luas $KLMN$;

b. keliling $ABCD$ = Keliling $KLMN$;

c. $ABCD \cong KLMN$!

3. Di antara pasangan bangun-bangun berikut, mana saja yang sebangun?

a. Dua buah segitiga sama kaki

b. Dua buah segitiga sama sisi

c. Dua buah persegi

d. Dua buah persegi panjang

e. Dua buah jajargenjang

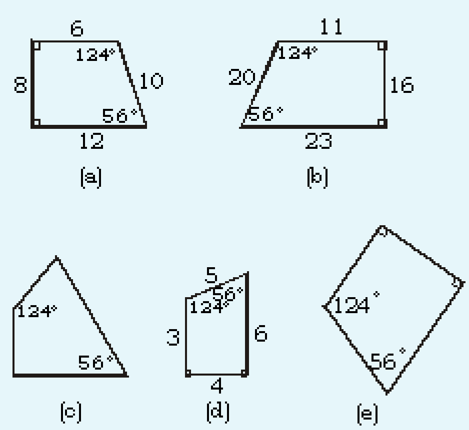
f. Dua buah layang-layang

g. Dua buah belah ketupat

h. Dua buah trapesium sama kaki

i. Dua buah segi lima beraturan

4.



Dari bangun-bangun tersebut, terhadap bangun (a), mana yang:

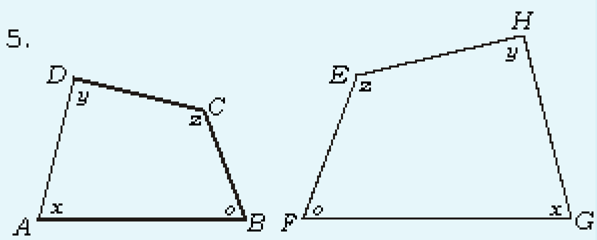
(i) pasti sebangun;

(ii) mungkin sebangun;

(iii) tidak mungkin sebangun?

Berilah penjelasan untuk masing-masing jawaban itu!

5.



Kedua segi empat pada gambar di atas adalah sebangun. Sebutkan:

a. pasangan sudut-sudut yang sama besar;

b. pasangan sisi-sisi yang sebanding!

6. Sebuah kusen jendela berukuran $75 \text{ cm} \times 125 \text{ cm}$ terbuat dari kayu. Lebar kayu kusen setiap sisinya sama, yaitu 5 cm.

a. Sketlah kusen tersebut!

b. Berapa ukuran bangun dalam kusen itu?

c. Apakah persegi panjang tepi dalam kusen sebangun dengan persegi panjang tepi luarnya?

7. Selembar kertas lukisan abstrak berukuran $24 \text{ cm} \times 16 \text{ cm}$ dilekatkan pada sehelai karton sedemikian hingga bagian atas, kiri, dan kanan lukisan masih tersisa karton selebar 3 cm. Jika kertas lukisan dan karton sebangun maka:

a. sketsalah keadaan itu;

b. hitunglah lebar karton yang diperlukan;

c. tentukan lebar sisa karton di bagian bawah kertas lukisan;

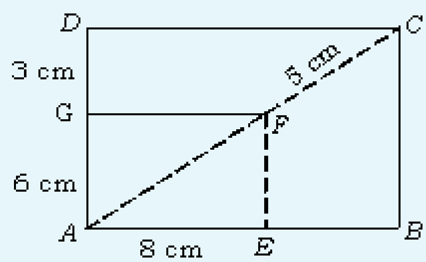
d. tentukan perbandingan antara panjang kertas lukisan dan panjang karton;

e. tentukan perbandingan antara luas kertas lukisan dan luas karton;

f. adakah hubungan antara jawaban d dan e!

(Petunjuk: ada dua kemungkinan jawaban dari seluruh pertanyaan di atas).

8. Perhatikan gambar di bawah ini!

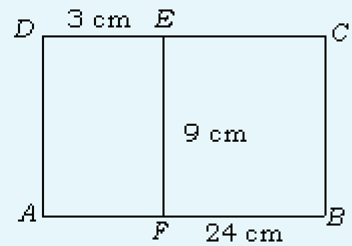


a. Tentukanlah panjang *AF* dan *FC*!

b. Tentukanlah panjang *AB* dan *EB*!

c. Apakah segi empat *AEFG* ~ *ABCD* ?

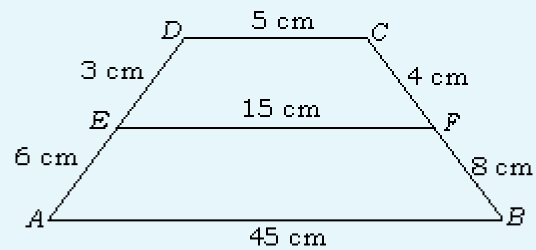
9. Perhatikan gambar di bawah ini!



Selidikilah persegi panjang manakah yang sebangun!

10. Perhatikan gambar di bawah ini!

a. Apakah *ABCD* ~ *DCFE* ? Jelaskan!



b. Apakah *ABCD* ~ *ABFE* ? Jelaskan!

c. Apakah *ABFE* ~ *DCFE* ? Jelaskan!

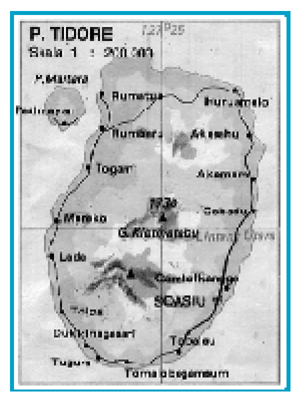
1.1.1 Gambar berskala

Gambar berskala adalah gambar yang diperoleh dengan memperbesar atau memperkecil benda aslinya dengan perbandingan tertentu. Jadi, gambar berskala dengan benda aslinya mempunyai bentuk sama dan ukuran-ukurannya mempunyai perbandingan yang sama. Besar nilai perbandingan ini sering disebut skala. Jadi, dapat pula dikatakan bahwa gambar berskala dengan benda aslinya saling sebangun.

Macam-macam gambar berskala, antara lain:

1. peta (gambar 1.13);
2. model atau maket; dan
3. foto.

Kita sudah mempelajari tentang skala di kelas VII. Untuk lebih memahami lagi tentang gambar berskala, kerjakan latihan berikut ini!



Gambar 1.13

Peta P. Tidore

Sumber: Atlas Indonesia dan Dunia

LATIHAN 2

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

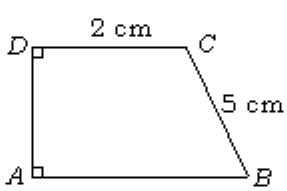
1. Dari sebuah film negatif yang lebarnya 3 cm dan tingginya 4 cm, dicetak sebuah foto dengan tinggi 10 cm. Berapa sentimeter lebar foto tersebut? Hitunglah perbandingan luas film negatif dengan luas foto!
2. Pada foto, lebar dan tinggi suatu pintu gedung berturut-turut 4 cm dan 7 cm. Jika tinggi pintu gedung sebenarnya 2,1 m, berapa luas pintu sebenarnya?
3. Model sebuah pesawat terbang dibuat dengan panjang sayap 15 cm dan panjang badan 12 cm. Jika panjang badan pesawat 28 m, tentukan panjang sayap pesawat terbang tersebut!
4. Sebuah monumen yang tingginya 8 m berbentuk limas dengan alas persegi, dibuat dari batu granit. Jika volume model 648 cm^3 dan panjang sisi alasnya 9 cm, hitunglah:
   a. tinggi model;
   b. panjang sisi alas monumen sesungguhnya;
   c. volume sebenarnya batu granit yang dibutuhkan untuk membuat monumen tersebut!
5. Sebuah rumah susun berlantai 8 dengan tinggi 24 m dibuat maketnya dari karton oleh seorang arsitek. Karena kelalaiannya, maket tersebut dibuat dengan tinggi 22,5 cm dan lebar 15 cm. Agar maket tersebut sebanding dengan sebenarnya, ia harus memotong tingginya $\frac{1}{5}$ bagian.
   a. Berapa tinggi maket semestinya?
   b. Berapa lebar rumah susun sebenarnya?
   c. Berapa tinggi tiap lantai rumah susun pada maket semestinya?
   d. Jika tidak jadi dipotong, agar tinggi tiap lantai maket tersebut sebanding dengan tinggi sesungguhnya, berapa banyak lantai pada maket tersebut?

1.1.2 Menghitung panjang sisi yang belum diketahui dari dua bangun yang kongruen dan sebangun

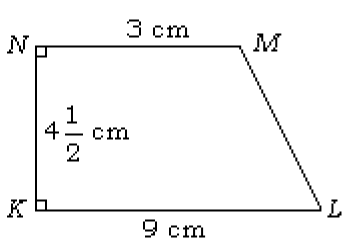
Jika ada dua buah bangun dikatakan sebangun maka kedua bangun itu memenuhi syarat:

1. sudut-sudut yang bersesuaian sama besar;
2. sisi-sisi yang bersesuaian mempunyai per-bandingan sama.

Demikian juga jika dua bangun dikatakan kongruen maka bangun itu pasti sebangun dengan perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian sama dengan 1.



Gambar 1.14
Trapesium *ABCD*



Gambar 1.15
Trapesium *KLMN*

Contoh soal 7:

Perhatikan gambar trapesium *ABCD* dan trapesium *KLMN* di samping ini! Diketahui $ABCD \sim KLMN$ maka

a) Tuliskan pasangan sudut-sudut yang sama besar!
b) Tuliskan perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian!
c) Tentukan panjang *AD*, *AB*, dan *LM*!

Jawab:

Diketahui: $ABCD \sim KLMN$ maka

a. $\angle D = \angle N$ $\quad$ $\angle C = \angle M$

$\angle A = \angle K$ $\quad$ $\angle B = \angle L$

b. $\frac{AD}{NK} = \frac{DC}{NM} = \frac{BC}{ML} = \frac{AB}{KL}$

c. $\frac{AD}{4{,}5} = \frac{2}{3} = \frac{5}{ML} = \frac{AB}{9}$

$\frac{AD}{4{,}5} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow AD = \frac{4{,}5 \times 2}{3} = 3 \Rightarrow \therefore$ panjang AD = 3 cm

$\frac{2}{3} = \frac{5}{ML} \Leftrightarrow ML = \frac{3 \times 5}{2} = 7{,}5 \Rightarrow \therefore$ panjang ML = 7,5 cm

$\frac{2}{3} = \frac{AB}{9} \Leftrightarrow AB = \frac{2 \times 9}{3} = 6 \Rightarrow \therefore$ panjang AB = 6 cm

Contoh soal 8:

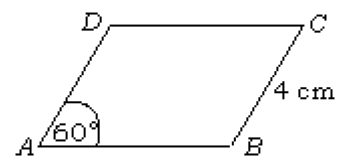
Kedua jajargenjang di samping ini adalah kongruen.

Tentukanlah:

a) sudut-sudut yang belum diketahui!

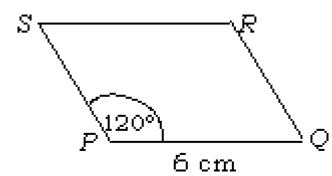
b) perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian!

c) panjang sisi-sisi yang belum diketahui!



Gambar 1.16

Jajargenjang *ABCD*



Gambar 1.17

Jajargenjang *PQRS*

Jawab:

a. $\angle A = \angle Q = 60°$

$\angle B = \angle P = 120°$

$\angle C = \angle A = 60°$ (sifat jajargenjang)

$\angle D = \angle B = 120°$ (sifat jajargenjang)

$\angle R = \angle P = 120°$ (sifat jajargenjang)

$\angle S = \angle Q = 60°$ (sifat jajargenjang)

b. $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{PS} = 1$

c. $\frac{AB}{6} = \frac{4}{PS} = 1$

$\frac{AB}{6} = 1 \Leftrightarrow AB = 6$

$\frac{4}{PS} = 1 \Leftrightarrow PS = 4$

$$\left.\begin{aligned} AD = BC &= 4 \text{ cm} \\ DC = AB &= 6 \text{ cm} \\ SR = PQ &= 6 \text{ cm} \\ RQ = PS &= 4 \text{ cm} \end{aligned}\right\} \text{sifat jajargenjang}$$

Kita ingat kembali pelajaran di kelas VII, yaitu tentang sifat-sifat jajargenjang.

1. Sisi-sisi yang berhadapan sama panjang dan sejajar;
2. Kedua diagonalnya saling membagi dua sama panjang (berpotongan di titik tengah);
3. Sudut-sudut yang berhadapan sama besar;
4. Sudut-sudut yang berdekatan saling berpelurus;
5. Jajargenjang dapat menempati bingkainya dengan tepat setelah diputar setengah putaran pada titik potong diagonalnya.

Contoh soal 9:

Diketahui sebuah lukisan sebangun dengan bingkainya. Ukuran lukisan $9 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}$. Setelah lukisan dipasang pada bingkai, ternyata lebar bingkai bagian kiri, kanan, dan atas yang tidak tertutup lukisan sama, yaitu 3 cm.

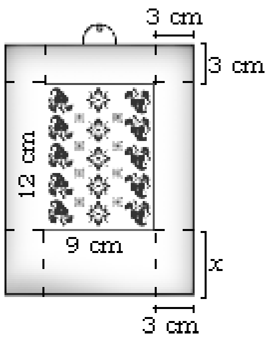
a) Tentukan lebar bingkai bagian bawah yang tidak tertutup lukisan!

b) Tentukan ukuran bingkai!

Jawab:

Ada 2 alternatif jawaban:

Alternatif jawaban I lukisan yang dipasang melebar (panjang pada posisi vertikal).



Gambar 1.18
Lukisan yang dipasang melebar

Diketahui: lukisan ~ bingkai, maka:

$$\frac{12}{12+3+x} = \frac{9}{9+3+3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{12}{15+x} = \frac{9}{15}$$

$$\Leftrightarrow \quad (15+x)9 = 12 \times 15$$

$$\Leftrightarrow \quad 15 \times 9 + 9x = 12 \times 15$$

$$\Leftrightarrow \quad 9x = 12 \times 15 - 15 \times 9$$

$$\Leftrightarrow \quad 9x = 15(12-9)$$

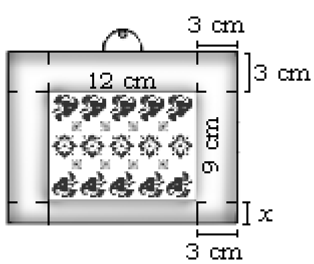
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{15 \times 3}{9}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 5$$

a. Jadi, lebar bingkai bagian bawah yang tidak tertutup lukisan adalah 5 cm.

b. Ukuran bingkai $15 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$.

Alternatif jawaban II lukisan dipasang memanjang (panjang dipasang pada posisi horisontal).



Gambar 1.19
Lukisan yang dipasang memanjang

Diketahui: lukisan ~ bingkai, maka:

$$\frac{9}{9+3+x} = \frac{12}{12+3+3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{9}{12+x} = \frac{12}{18}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(12+x) = 9 \times 3$$

$$\Leftrightarrow \quad 24 + 2x = 27$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x = 3$$

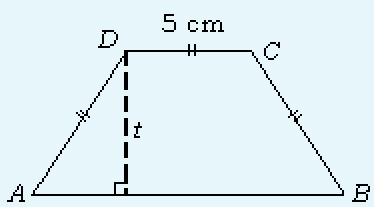
$$\Leftrightarrow \quad x = 1{,}5$$

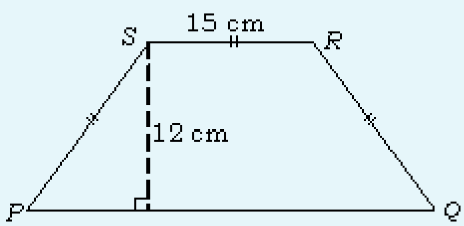
a. Jadi, lebar bingkai bagian bawah yang tidak tertutup lukisan adalah 1,5 cm.

b. Ukuran bingkai $18 \text{ cm} \times 13{,}5 \text{ cm}$.

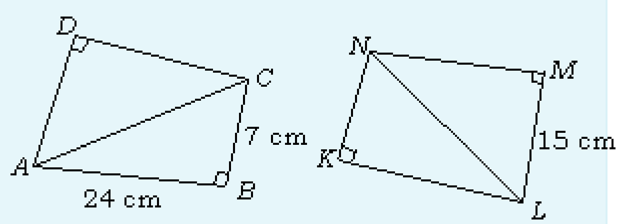
Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

1. Diketahui $ABCD$ dan $KLMN$ adalah dua persegi panjang yang sebangun. Jika $AB = 6$ cm dan $AC = 10$ cm, sedangkan $KL = 16$ cm adalah panjang $KLMN$. Maka:
   a. tentukan panjang BC;
   b. buat perbandingan sisi-sisi yang seletak;
   c. tentukan panjang LM;
   d. tentukan perbandingan sisi-sisinya;
   e. tentukan perbandingan kelilingnya;
   f. tentukan perbandingan luasnya!
   g. bagaimana kesimpulanmu?
2. Perhatikan gambar di bawah ini!





   Jika $ABCD \sim PQRS$ maka:
   a. buat perbandingan sisi-sisi yang seletak;
   b. tentukan t dan PQ jika $AB = 11$ cm;
   c. tentukanlah perbandingan keliling $ABCD$ dan $PQRS$;
   d. tentukanlah perbandingan luas $ABCD$ dan $PQRS$!
3. Suatu persegi panjang yang selisih panjang dan lebarnya adalah 5 cm sebangun dengan persegi panjang yang selisih antara panjang dan lebarnya 7,5 cm. Jika keliling persegi yang kecil 26 cm, maka tentukanlah:
   a. panjang dan lebar kedua persegi panjang tersebut;
   b. perbandingan kelilingnya;
   c. perbandingan luasnya!
4. Sebuah foto dengan ukuran $15 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$ dipasang pada bingkai yang sebangun dengan foto tersebut. Jika lebar bingkai bagian kiri, kanan, dan atas yang tidak tertutup foto sama, yaitu 3 cm, maka tentukanlah:
   a. lebar bingkai bagian bawah (2 alternatif jawaban);
   b. ukuran bingkai (2 alternatif jawaban)!
5. Perhatikan gambar berikut!



   Jika $ABCD \cong KLMN$

   Tentukanlah:
   a. panjang AC dan NL;
   b. panjang NM, AD, dan DC;
   c. panjang NK dan KL!

1.2 Sifat-sifat Dua Segitiga Sebangun dan Kongruen

Pada subbab sebelumnya, sudah kita bahas bahwa dua buah bangun datar bersisi lurus dikatakan sebangun jika sisi-sisi yang bersesuaian mempunyai perbandingan yang sama dan sudut-sudut yang bersesuaian besarnya sama.

1.2.1 Sifat dua segitiga yang sebangun

Dua segitiga dikatakan sebangun jika salah satu syarat dipenuhi. Untuk lebih jelasnya, lakukan kegiatan berikut ini!

TUGAS PROYEK

1. Gambarlah dua segitiga yang sisinya mempunyai perbandingan yang sama! Misalkan,

   panjang sisi-sisi segitiga I : 3 cm, 4 cm, dan 5 cm.

   panjang sisi-sisi segitiga II : 6 cm, 8 cm, dan 10 cm.

   Perbandingan sisi-sisi segitiga itu adalah $\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$
2. Ukurlah sudut-sudut kedua segitiga tersebut!
3. Bagaimana sudut-sudut kedua segitiga tersebut?
4. Ulangi kegiatan 1 dan 2 dengan berbagai ukuran!
5. Apakah kesimpulanmu?
6. Lukislah dua segitiga yang sudut-sudutnya sama besar!
7. Ukurlah panjang sisi-sisi kedua segitiga tersebut dengan penggaris!
8. Bagaimana perbandingan panjang sisi-sisinya?
9. Ulangi kegiatan 6 dan 7 untuk berbagai sudut!
10. Apakah kesimpulanmu?

Jika kegiatan di atas dilakukan dengan teliti, dapat kita ambil dua kesimpulan sebagai berikut.

1) Jika sisi-sisi yang bersesuaian dari dua segitiga mempunyai perbandingan sama, maka sudut-sudut kedua segitiga itu pasti sama besar.
2) Jika dua segitiga memiliki sudut-sudut yang sama maka sisi-sisi yang bersesuaian pasti mempunyai perbandingan yang sama.

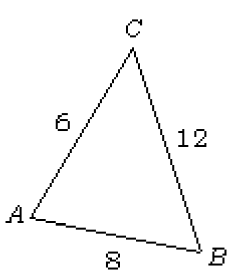
Tahukah anda buktinya?
Coba kamu buktikan sendiri!

Dengan demikian, dua segitiga dikatakan sebangun jika memenuhi salah satu syarat di bawah ini:

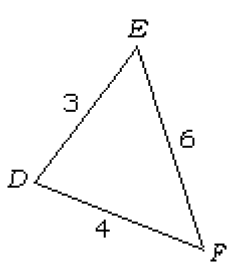
1. dua sudutnya sama besar; atau
2. sisi-sisi yang bersesuaian mempunyai perbandingan yang sama; atau
3. satu sudut dan dua sisi yang mengapit sudut itu mempunyai perbandingan yang sama.

Contoh soal 10:

Perhatikan segitiga ABC dan segitiga DEF pada gambar di samping!



Gambar 1.20
Segitiga *ABC*



Gambar 1.21
Segitiga *DEF*

a. Apakah $\Delta ABC \sim \Delta DEF$?
b. Tentukanlah sudut-sudut yang sama besar!

Jawab:

a. Sisi yang terpendek dibandingkan dengan yang terpendek, yaitu $\frac{AC}{DE} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$.

   Sisi yang terpanjang dibandingkan dengan sisi yang terpanjang, yaitu $\frac{BC}{EF} = \frac{12}{6} = \frac{2}{1}$.

Sisi yang ketiga dengan sisi yang ketiga, yaitu $\frac{AB}{DF} = \frac{8}{4} = \frac{2}{1}$.

Jadi, $\frac{AC}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AB}{DF} = \frac{2}{1}$.

Dengan demikian, $\Delta\, ABC \sim \Delta\, DEF$.

b. Karena $\Delta\, ABC \sim \Delta\, DEF$ (sisi-sisi yang bersesuaian sebanding) maka sudut-sudut yang seletak besarnya sama.

$\angle A = \angle D$ (letaknya sama-sama di antara sisi yang terpendek dengan sisi ketiga)

$\angle B = \angle F$ (letaknya sama-sama di antara sisi yang terpanjang dengan sisi ketiga)

$\angle C = \angle E$ (letaknya sama-sama di antara sisi yang terpendek dan terpanjang)

Contoh soal 11:

Perhatikan segitiga PQR dan segitiga KLM pada gambar di samping!

a. Apakah $\Delta\, PQR \sim \Delta\, KLM$?

b. Tentukanlah perbandingan sisi-sisinya!

Jawab:

a. $\angle Q = 180° - (50° + 70°)$

$= 60°$

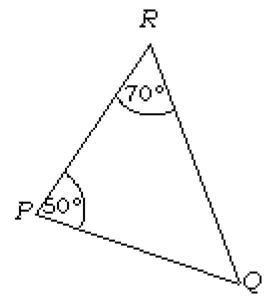
$\angle K = 180° - (60° + 70°)$

$= 50°$

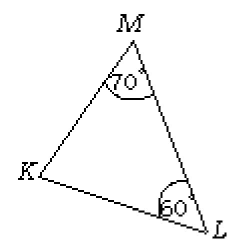
Jadi, $\Delta\, PQR \sim \Delta\, KLM$ (sudut-sudutnya sama besar).

b. Perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian:

$$\frac{PQ}{KL} = \frac{QR}{ML} = \frac{PR}{KM}$$



Gambar 1.22
Segitiga *PQR*



Gambar 1.23
Segitiga *KLM*

Contoh soal 12:

Perhatikan gambar $\Delta\, ABC$ dan $\Delta\, DEF$ di samping!

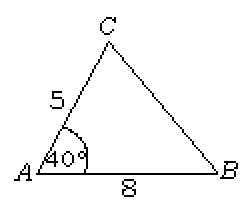
Apakah $\Delta\, ABC \sim \Delta\, DEF$?

Jawab:

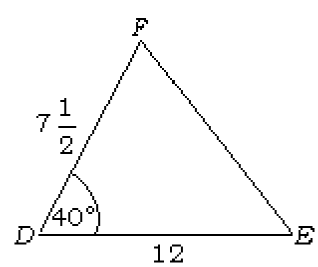
$\angle A = \angle D$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{AC}{DF} = \frac{5}{7\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \\ \frac{AB}{DE} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \end{array}\right\}$$ sisi yang mengapit sudut yang sama.

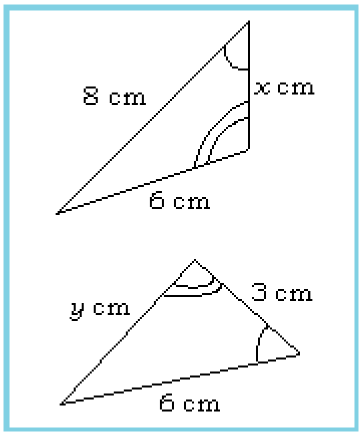
Jadi, $\Delta\, ABC \sim \Delta\, DEF$.



Gambar 1.24
Segitiga *ABC*



Gambar 1.25
Segitiga *DEF*



Gambar 1.26
Segitiga sebangun

Contoh soal 13:

Diberikan dua segitiga yang sebangun seperti terlihat pada gambar 1.25 di samping. Tentukanlah nilai x dan y!

Jawab:

Karena kedua Δ sebangun, maka sisi-sisi yang bersesuaian mempunyai perbandingan yang sama, yaitu:

$$\frac{8}{6} = \frac{6}{y} = \frac{x}{3} \quad \text{atau} \quad \frac{6}{8} = \frac{y}{6} = \frac{3}{x}$$

$$\frac{8}{6} = \frac{6}{y} \Leftrightarrow 8y = 36 \qquad\qquad \frac{8}{6} = \frac{x}{3} \Leftrightarrow 6x = 24$$

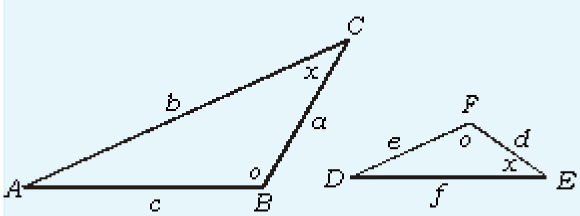
$$\Leftrightarrow y = \frac{36}{8} \qquad\qquad \Leftrightarrow x = 4$$

$$\Leftrightarrow y = 4\frac{1}{2}$$

LATIHAN 4

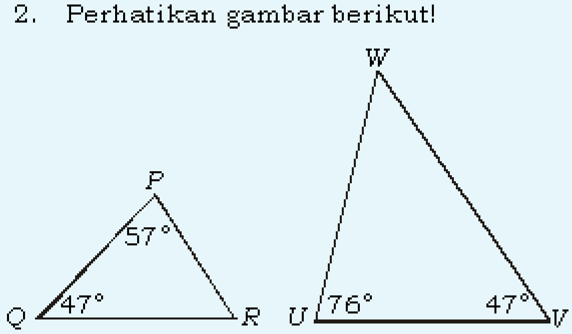
Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

1. Perhatikan gambar berikut!



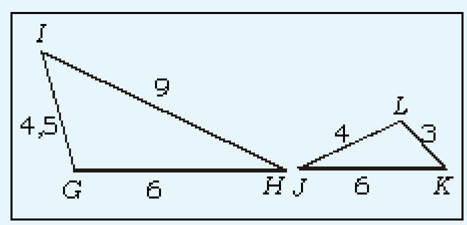
   a. Mengapa kedua segitiga pada gambar di atas sebangun? Buktikan!
   b. Tuliskan perbandingan senilai sisi-sisi yang bersesuaian!
   c. Jika panjang sisi b = 16 cm, c = 8 cm, d = 2 cm, dan e = 3 cm, hitunglah panjang sisi a dan f!

2. Perhatikan gambar berikut!

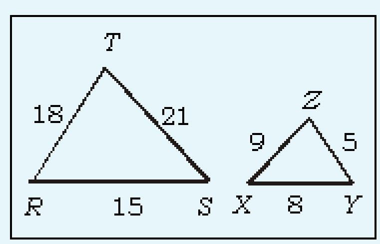


   a. Hitunglah besar $\angle R$ dan $\angle W$ pada gambar di atas!
   b. Buktikan bahwa kedua segitiga tersebut sebangun!
   c. Tuliskan perbandingan senilai sisi-sisi yang bersesuaian!

3.



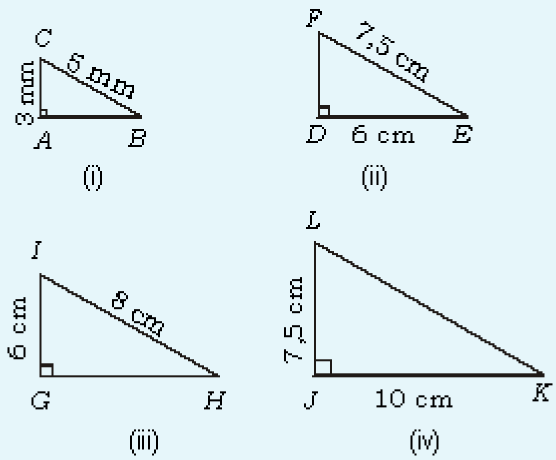
(a)



(b)

   a. Apakah pasangan segitiga pada gambar (a) di atas sebangun? Bagaimana pasangan segitiga pada gambar (b) apakah juga sebangun?
   b. Jika sebangun, sebutkan pasangan sudut-sudut yang sama besar!

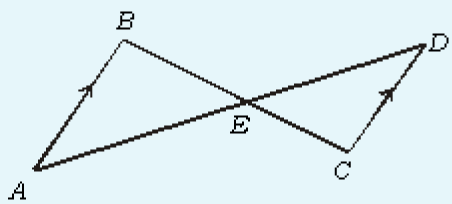
4. Perhatikan gambar berikut!



a. Hitunglah panjang sisi yang belum diketahui pada ke empat segitiga tersebut!

b. Segitiga mana saja yang sebangun dengan segitiga *BAC*?

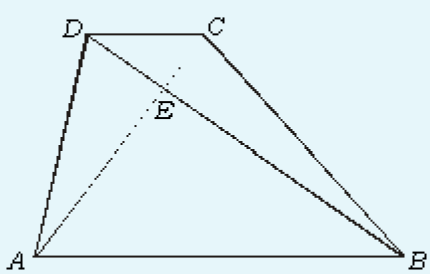
5.



a. Buktikan bahwa segitiga *ABE* dan segitiga *CDE* di atas sama sudut!

b. Jika panjang $AB = 6$ cm, $AE = 7{,}5$ cm, $ED = 5$ cm, dan $EC = 3$ cm, hitunglah panjang *BE* dan *CD*!

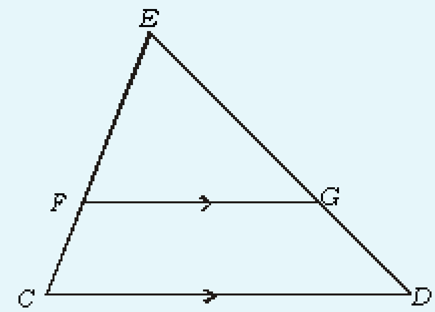
6. Gambar di bawah adalah trapesium *ABCD* dengan kedua diagonal berpotongan di *E*.



a. Sebutkan sudut-sudut yang sama besar dalam ΔABE dan ΔDCE, disertai alasannya!

b. Jika panjang $AB = 15$ cm, $BE = 12{,}5$ cm, $DE = 5$ cm, dan $CE = 3$ cm, hitunglah panjang *CD* dan *AE*!

7. Pada gambar segitiga *CDE* berikut ini, garis $FG \parallel CD$.

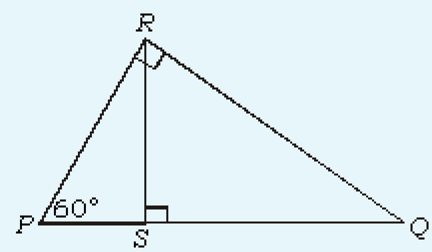


a. Sebutkan sudut-sudut yang sama besar pada ΔFGE dan ΔCDE beserta alasannya!

b. Tulislah perbandingan senilai sisi-sisi yang bersesuaian!

c. Jika panjang $FG = 8$ cm, $GE = 9$ cm, $DG = 3$ cm, dan $CE = 8$ cm, hitunglah panjang *CD*, *FE*, dan *CF*!

8. Segitiga *PQR* siku-siku di *R*, dengan *RS* adalah garis tinggi. Perhatikan gambar di bawah ini!



a. Hitunglah besar $\angle PRS$, $\angle SRQ$, dan $\angle SQR$!

b. Buktikan bahwa ΔPSR sebangun dengan ΔSRQ!

c. Tulislah perbandingan senilai sisi-sisi yang bersesuaian!

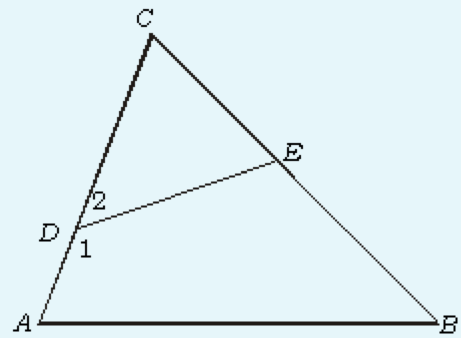
d. Jika panjang $PS = 3$ cm, $PQ = 12$ cm, dan $RQ = 6\sqrt{3}$ cm, hitunglah panjang *SR* dan *PR*!

9. Dalam ΔABC, panjang sisi $AB = 12$ cm, $BC = 8$ cm, dan $AC = 10$ cm. Dalam ΔPQR, panjang sisi $PQ = 12$ cm, $QR = 15$ cm, dan $PR = 18$ cm.

a. Buktikan bahwa kedua segitiga tersebut sebangun!

b. Sebutkan pasangan sudut-sudut yang sama besar!

10. Pada gambar berikut, $\angle D_1$ ($= \angle ADE$) dan $\angle B$ adalah sepasang sudut yang saling berpelurus.
    a. Nyatakan besar $\angle ABC$ dalam $\angle ADE$, demikian juga untuk $\angle CDE$!
    b. Buktikan bahwa ΔABC dan ΔDEC sudut-sudutnya sama!
    c. Tulislah perbandingan senilai sisi-sisi yang bersesuaian!
    d. Jika $AD = 7$ cm, $CD = 10$ cm, dan $CE = 8$ cm, hitunglah panjang BC!



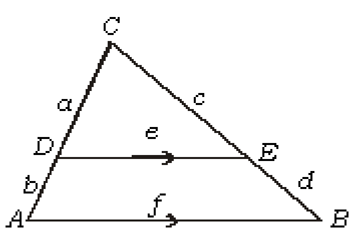
Untuk mempertajam pemahamanmu mengenai segitiga-segitiga yang sebangun, perhatikanlah contoh-contoh di bawah ini!

Contoh soal 14:

Pada ΔABC, dilukis $DE \parallel AB$ seperti terlihat pada gambar di samping. Buktikan bahwa:

a. $\Delta ECD \sim \Delta ABC$;

b. Tulis perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian, kemudian buktikan pula bahwa $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$!



Gambar 1.27
Segitiga ABC

Jawab:

a. $\angle CDE = \angle CAB$ (sudut sehadap)
   $\angle CED = \angle CBA$ (sudut sehadap)
   $\angle DCE = \angle ACB$ (berimpit)
   Jadi, $\Delta ABC \sim \Delta CDE$.

b. Sehingga, sisi-sisi yang bersesuaian mempunyai perbandingan yang sama, yaitu:

$$\boxed{\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB} \quad \text{atau} \quad \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} = \frac{e}{f}}$$

> **Kesimpulan:**
> Pada segitiga, jika dibuat ruas garis yang sejajar dengan salah satu sisinya maka segitiga-segitiga yang terbentuk sebangun.

Jika dipilih $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$

$\Leftrightarrow a(c+d) = c(a+b)$

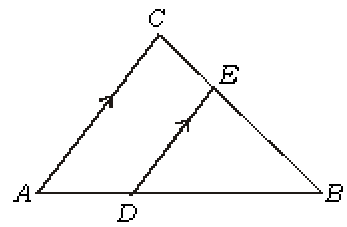
$\Leftrightarrow ac + ad = ac + bc$ (kedua ruas dikurangi ac)

$\Leftrightarrow ad = bc$

$\Leftrightarrow \boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$ (kedua ruas dibagi bd)

Contoh soal 15:

Dalam segitiga ABC pada gambar di samping, DE sejajar dengan AC. Diketahui $AD = 3$ cm, $DB = 6$ cm, $CE = 2$ cm, $DE = 5$ cm.



Gambar 1.28
Segitiga ABC

a. Tulislah perbandingan senilai sisi-sisi yang bersesuaian!

b. Hitunglah panjang BE dan AC!

Jawab:

a. $\dfrac{BE}{BC} = \dfrac{BD}{BA} = \dfrac{DE}{AC}$

b. Dipilih: $\dfrac{BE}{BC} = \dfrac{BD}{BA}$ dan dimisalkan $BE = x$ cm. Maka,

$$\frac{BE}{BC} = \frac{BD}{BA} \Leftrightarrow \frac{x}{x+2} = \frac{6}{6+3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x}{x+2} = \frac{6}{9}$$
$$\Leftrightarrow 9x = 6(x+2)$$
$$\Leftrightarrow 9x = 6x + 12$$
$$\Leftrightarrow 9x - 6x = 12$$
$$\Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow x = 4$$

Cara lain: $\dfrac{BE}{CE} = \dfrac{BD}{DA} \Leftrightarrow \dfrac{BE}{2} = \dfrac{6}{3}$

$$\Leftrightarrow 3BE = 6 \times 2$$
$$\Leftrightarrow BE = \frac{6 \times 2}{3} = 4$$

Jadi, panjang BE adalah 4 cm.

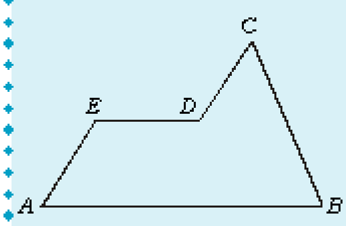
Dipilih: $\dfrac{BD}{BA} = \dfrac{DE}{AC}$. Maka,

$$\frac{BD}{BA} = \frac{DE}{AC} \Leftrightarrow \frac{6}{6+3} = \frac{5}{AC}$$
$$\Leftrightarrow 6AC = 5(6+3)$$
$$\Leftrightarrow 6AC = 45$$
$$\Leftrightarrow AC = \frac{45}{6} \Leftrightarrow AC = 7{,}5$$

Jadi, panjang AC adalah 7,5 cm.

Bermain dengan Matematika

Perhatikan gambar geometri berikut!



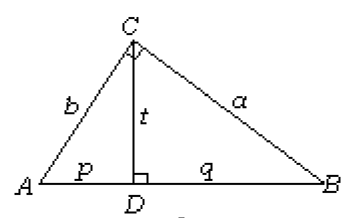
Geometri $ABCDE$ di atas dibangun dari empat buah bangun geometri yang saling kongruen. Gunakanlah pensil untuk membagi bangun $ABCDE$ menjadi empat bidang yang kongruen tersebut!

Selamat mencoba!

Sumber: Seri Matematika Populer
Bermain dengan Matematika
Drs. Badrul Komar Ruslani, BA

Contoh soal 16:

Pada ΔABC siku-siku di C, dibuat garis tinggi CD dari titik sudut C. Buktikan bahwa:



Gambar 1.29
Segitiga ABC siku-siku di C

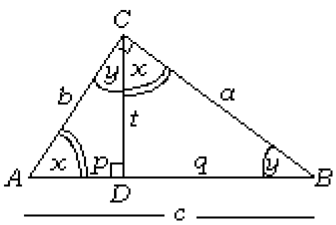
a. $\Delta ABC \sim \Delta ADC \sim \Delta DBC$!

b. Buktikan bahwa:

(i) $t^2 = p \cdot q$

(ii) $b^2 = p \cdot c$

(iii) $a^2 = q \cdot c$



Gambar 1.30
Segitiga ABC siku-siku di C

Jawab:

a. Misal $\angle A = x$ dan $\angle B = y$, maka $x + y = 90°$.

Perhatikan ΔADC siku-siku di D! Maka, $\angle ACD + \angle A = 90°$. Padahal, $x + y = 90°$. Jadi, $\angle ACD = y$.

Perhatikan ΔDBC siku-siku di D! Maka, $\angle B + \angle BCD = 90°$ atau $y + \angle BCD = 90°$. Padahal, $x + y = 90°$. Jadi, $\angle BCD = x$.

Ternyata ΔABC, ΔADC, dan ΔDBC mempunyai sudut-sudut yang sama, yaitu $90°$, x, dan y, seperti tampak pada gambar 1.29 di samping.

Jadi, $\Delta ABC \sim \Delta ADC \sim \Delta DBC$.

b. (i) Karena $\Delta ADC \sim \Delta DBC$, maka

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{p}{t} = \frac{t}{q}$$

Perhatikan $\frac{p}{t} = \frac{t}{q} \Leftrightarrow \boxed{t^2 = p \cdot q}$

(ii) Karena $\Delta ABC \sim \Delta ADC$, maka

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} = \frac{CB}{CD}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{p} = \frac{a}{t}$$

Perhatikan $\frac{c}{b} = \frac{b}{p} \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{b^2 = p \cdot c}}$

(iii) Karena $\Delta ABC \sim \Delta DBC$, maka

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD} = \frac{CA}{CD}$$

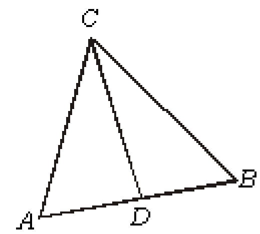
$$\frac{c}{a} = \frac{a}{q} = \frac{b}{t}$$

Perhatikan $\frac{c}{a} = \frac{a}{q} \Leftrightarrow \boxed{a^2 = q \cdot c}$

a^2

Contoh soal 17:

Perhatikan gambar ΔABC di samping! CD adalah garis bagi, buktikanlah bahwa $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{DB}$!



Gambar 1.31
Segitiga ABC

Bukti:

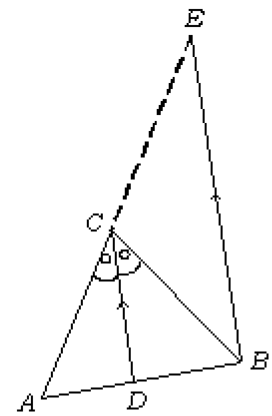
Tarik melalui B garis sejajar CD dan perpanjang AC, sehingga keduanya berpotongan di E!

$$\left.\begin{array}{ll} \angle ACD = \angle BCD & \text{(diketahui } CD \text{ garis bagi)} \\ \angle ACD = \angle AEB & \text{(sudut sehadap)} \\ \angle BCD = \angle EBC & \text{(sudut dalam berseberangan)} \end{array}\right\} \angle EBC = \angle BEC$$

Jadi, ΔBCE adalah segitiga sama kaki. Jadi, $BC = CE$.

Menurut contoh soal 14, $\Delta ACD \sim \Delta ABE$ sehingga

$$\frac{AC}{CE} = \frac{AD}{DB} \Leftrightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} \text{ terbukti.}$$



Gambar 1.32
Segitiga ABE

Contoh soal 18:

Diketahui ΔABC, AD dan BE adalah garis berat. Kedua garis berat berpotongan di T. Buktikan bahwa $\frac{ET}{TB} = \frac{DT}{TA} = \frac{1}{2}$!

Bukti:

Tarik garis ED, sedemikian sehingga $AB \parallel ED$! Jadi, $\Delta EDC \sim \Delta ABC$. Karena $\Delta EDC \sim \Delta ABC$, maka $\frac{CE}{CA} = \frac{CD}{CB} = \frac{ED}{AB} = \frac{1}{2}$.

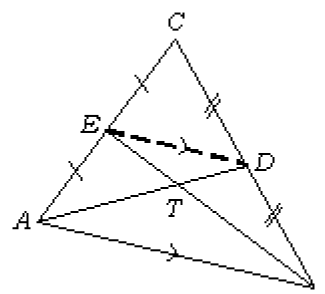
Perhatikan ΔEDT dan ΔABT!

$\angle ETD = \angle ATB$ (sudut bertolak belakang)

$\angle DET = \angle ABT$ (sudut dalam berseberangan)

Diperoleh, $\Delta EDT \sim \Delta ABT$

Jadi, $\frac{ET}{TB} = \frac{DT}{TA} = \frac{ED}{AB} = \frac{1}{2}$ terbukti.



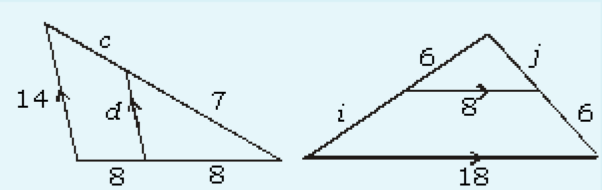
Gambar 1.33
Segitiga ABC

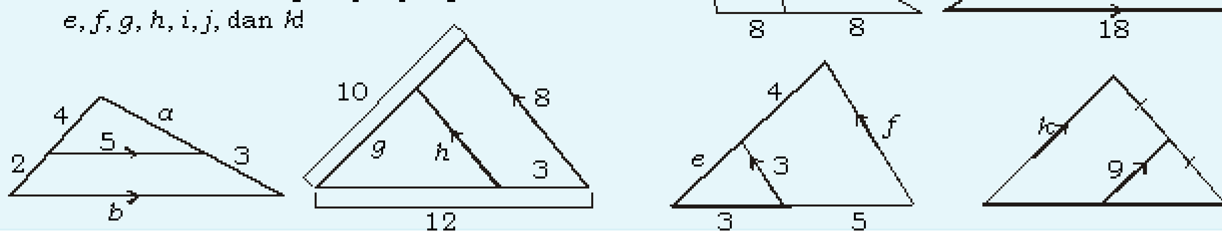
> ***Kesimpulan:***
> Garis berat-garis berat segitiga berpotongan di satu titik dan terbagi menjadi 2 ruas garis dengan perbandingan 2 : 1.

LATIHAN 5

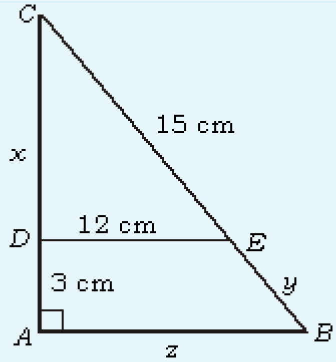
Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

1. Pada gambar berikut, satuan panjang adalah cm. Hitunglah panjang a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, dan k!

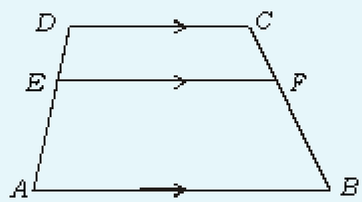




2. Pada gambar di samping, segitiga ABC siku-siku di A dan DE sejajar AB. Hitunglah panjang x, y, dan z!



3. Salinlah gambar trapesium $ABCD$ berikut ini! Kemudian, buatlah garis $CG \parallel DA$, dengan G pada AB, dan CG memotong EF di H!

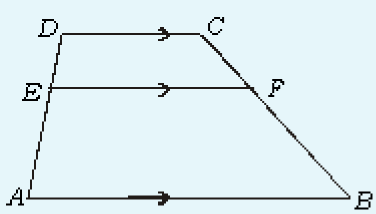


a. Tunjukkan bahwa $\frac{DE}{EA} = \frac{CF}{FB}$!

b. Jika panjang $DA = 18$ cm, $CF = 12$ cm, dan $FB = 15$ cm, hitunglah panjang DE dan EA!

c. Jika panjang $DC = 15$ cm, $AB = 33$ cm, hitunglah panjang EF!

4. Salinlah kembali gambar trapesium $ABCD$ di bawah ini, kemudian tariklah diagonal BD yang memotong EF di T!



a. Tunjukkan bahwa $ET = \frac{DE \cdot AB}{AD}$!

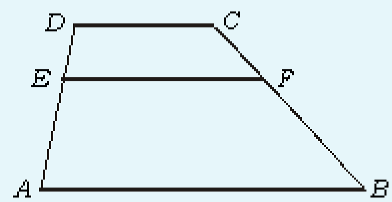
b. Tunjukkan pula bahwa

$TF = \frac{AE \cdot DC}{AD}$!

c. Dari a dan b di atas, tunjukkan bahwa $EF = \frac{DE \cdot AB + AE \cdot DC}{AD}$!

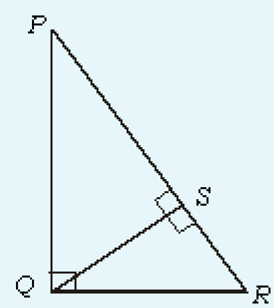
d. Dengan menggunakan jawaban c, jika $AD = 42$ cm, $DE = 30$ cm, $DC = 35$ cm, dan $AB = 70$ cm, hitunglah panjang EF!

5. Ujilah kebenaran jawaban soal nomor 4, jika digunakan diagonal AC yang memotong EF di Q!
Dari soal nomor 4 dan 5, dapat dibuat kesimpulan:

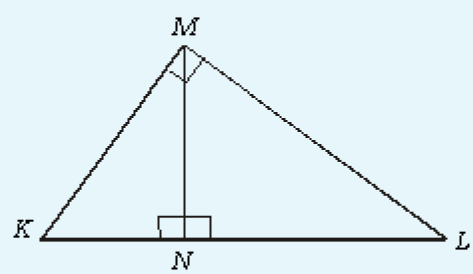


$EF = \frac{DE \cdot AB + AE \cdot DC}{AD}$!

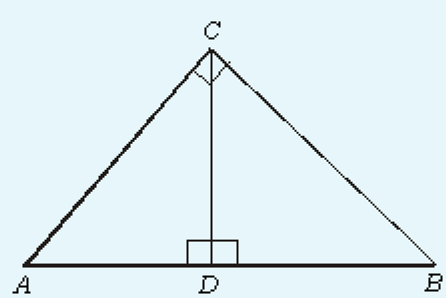
6. Gambar di bawah adalah segitiga PQR dengan panjang $QS = 12$ cm dan $RS = 9$ cm. Tentukan panjang PS, PQ, dan QR!



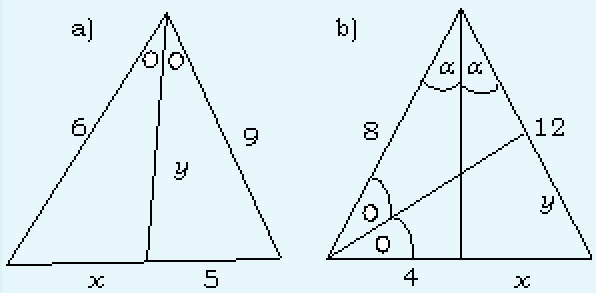
7. Segitiga KLM merupakan segitiga siku-siku di M, $KN = 9$ cm dan $NL = 16$ cm. Tentukan panjang MN, MK, dan ML!



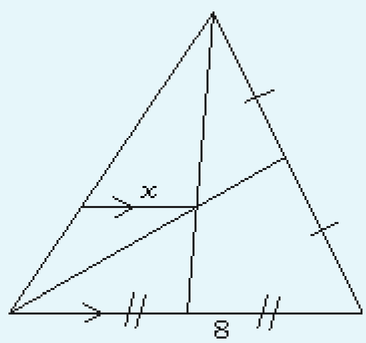
8. Segitiga ABC siku-siku di C, $AC = 8$ cm, $AD = 6$ cm. Tentukan panjang BD, CD, dan BC!



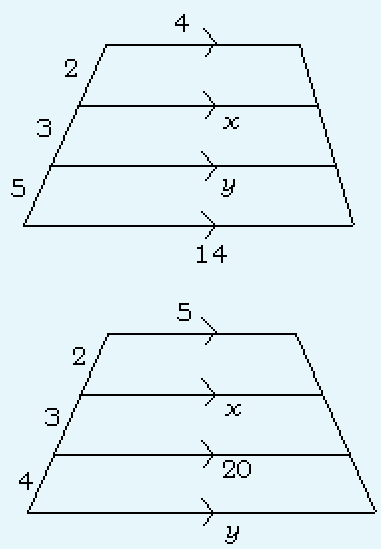
9. Tentukan nilai x dan y!



10. Tentukan nilai x!

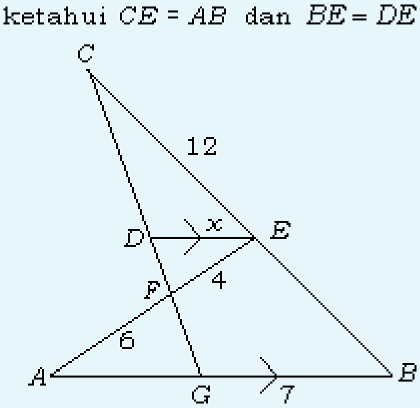


11. Tentukanlah nilai x dan y!

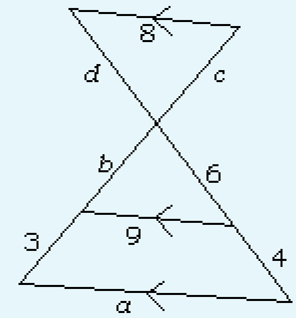


12. Tentukan panjang x!

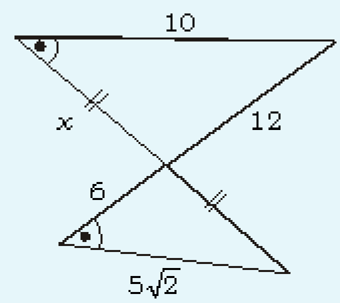
Diketahui $CE = AB$ dan $BE = DE$.



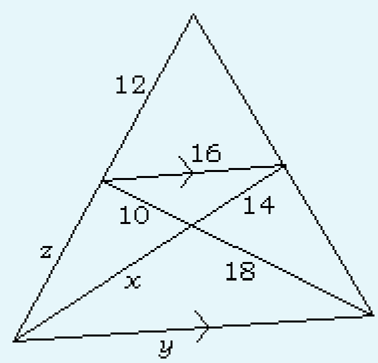
13. Tentukanlah nilai a, b, c, dan d!



14. Tentukanlah nilai x!



15. Tentukanlah nilai x, y, dan z!

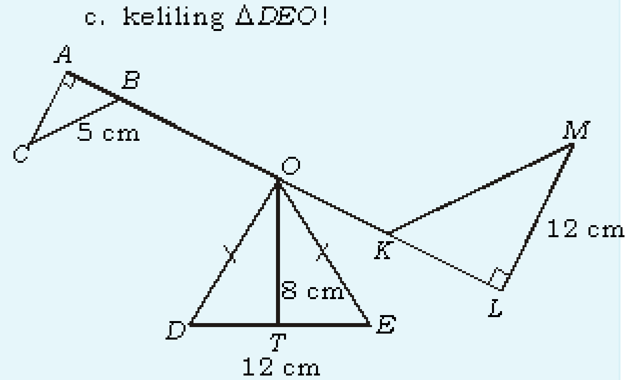


16. Diketahui $\Delta ABC \sim \Delta KLM$, $AC : LM$ = 1 : 3 dan O adalah titik tengah $\overline{AL}$. Jika AL = 30 cm dan $DT = TE$ = 6 cm, hitunglah:

a. panjang $\overline{BO}$ dan panjang $\overline{OK}$;

b. perbandingan panjang dan $\overline{BO}$ dan $\overline{OK}$;

c. keliling ΔDEO!



1.2.2 Segitiga-segitiga yang kongruen

Dua segitiga dikatakan kongruen jika kedua segitiga itu sebangun dan perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian sama dengan satu. Dengan demikian, kongruen disebut juga sama dan sebangun.

Perlu kita ingat kembali syarat-syarat agar dua segitiga sebangun, yaitu:

(1) sisi-sisi yang bersesuaian sebanding; atau

(2) satu sudut sama dan dua sisi yang mengapit sudut itu sebanding; atau

(3) dua sudut sama!

TUGAS PROYEK

1. Gambarlah pasangan segitiga ABC dan segitiga DEF dengan ukuran-ukuran di bawah ini.
   a. AB = 5 cm ; AC = 4 cm ; BC = 3 cm ; DE = 5 cm ; DF = 4 cm ; dan EF = 3 cm .
   b. AB = 6 cm ; AC = 4 cm ; $\angle BAC$ = 40° ; DE = 6 cm ; DF = 4 cm ; dan $\angle EDF$ = 40°.
   c. AB = 5 cm ; $\angle BAC$ = 30° ; $\angle ABC$ = 80° ; DE = 5 cm ; $\angle EDF$ = 30° ; dan $\angle DEF$ = 30° .
   d. BC = 4 cm ; $\angle ABC$ = 25° ; $\angle BAC$ = 110° ; EF = 4 cm ; $\angle DEF$ = 25° ; dan $\angle EDF$ = 110°
   e. AB = 4 cm ; AC = 5 cm ; $\angle ABC$ = 70° ; DE = 4 cm ; DF = 5 cm ; dan $\angle DEF$ = 70°
2. Ukurlah unsur-unsur yang belum diketahui (besar sudut dan panjang sisi) dari pasangan-pasangan segitiga tersebut!
3. Tulislah pasangan-pasangan sudut yang sama besar dari pasangan-pasangan segitiga tersebut!
4. Tulislah perbandingan sisi-sisi bersesuaian dari pasangan-pasangan segitiga tersebut!
5. Apakah yang dapat kamu simpulkan?

Berdasarkan kegiatan di atas, dapat disimpulkan bahwa dua segitiga dikatakan kongruen jika memenuhi salah satu syarat di bawah ini.

1) Sisi-sisi yang bersesuaian sebanding dan perbandingannya sama dengan 1.

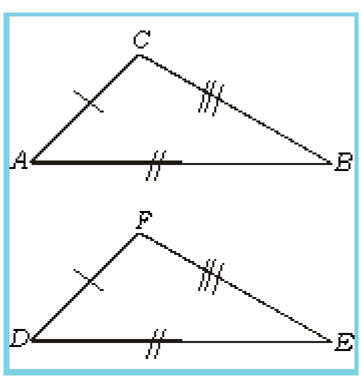
Hal ini dapat diartikan bahwa sisi-sisi yang bersesuaian pada kedua segitiga itu sama panjang, atau disingkat (S, S, S).

Perhatikan gambar 1.34 di samping!

Jika $\dfrac{AC}{DF} = \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = 1$

maka $AC = DF$, $AB = DE$, dan $BC = EF$.

Jadi, ΔABC dan ΔDEF mempunyai sisi-sisi yang sama panjang (S, S, S).



Gambar 1.34

Segitiga ABC dan segitiga DEF

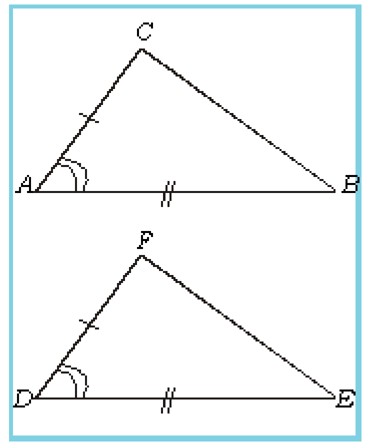
> 2) Satu sudut sama dan sisi-sisi yang mengapit sudut tersebut sebanding, dengan perbandingan sama dengan 1.

Perhatikan gambar 1.35 di samping!

Jika $\angle A = \angle D$ dan $\frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE} = 1$

maka $\Delta\ ABC \sim \Delta\ DEF$ dan sisi-sisi yang bersesuaian sama, sehingga $\Delta\ ABC \cong \Delta\ DEF$.

Jadi, $\Delta\ ABC \cong \Delta\ DEF$, karena memenuhi syarat satu sudut sama dan dua sisi yang mengapit sudut itu sama (S, Sd, S).



Gambar 1.35
Segitiga *ABC* dan segitiga *DEF*

> 3) Jika dua sudut pada dua segitiga sama maka sudut yang ketiga juga sama.

Hal itu mengakibatkan kedua segitiga itu sebangun. Agar kedua segitiga itu juga kongruen, salah satu dari sisi segitiga-segitiga itu harus sama.

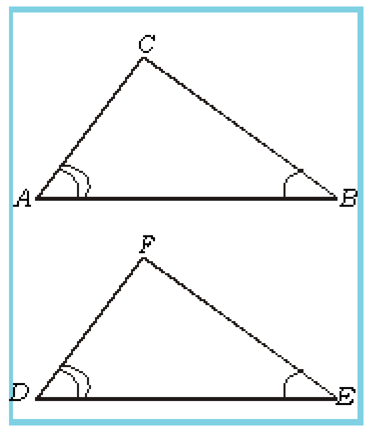
Perhatikan gambar 1.36 di samping!

a. Jika $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, dan $AB = DE$ maka $\Delta\ ABC \cong \Delta\ DEF$.

   Jadi, $\Delta\ ABC \cong \Delta\ DEF$ dengan syarat dua sudut dan satu sisi sekutu sudut tersebut sama (Sd, S, Sd).

b. Jika $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, dan $BC = EF$ maka $\Delta\,ABC$ kongruen dengan $\Delta\,DEF$.

Pada gambar 1.36, $\Delta\ ABC \cong \Delta\ DEF$ dengan syarat dua sudut sama dan satu sisi yang tidak terletak pada kedua sudut sama (Sd, Sd, S).



Gambar 1.36
Segitiga *ABC* dan segitiga *DEF*

> 4) Jika pada dua segitiga, dua sisi dan satu sudut yang tidak diapit oleh dua sisi tersebut sama, kedua segitiga itu belum tentu kongruen.

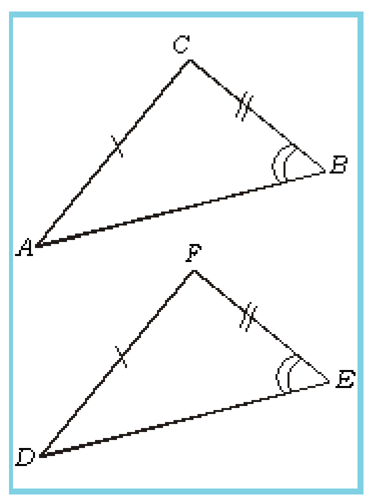
Artinya, kedua segitiga itu mungkin kongruen mungkin tidak kongruen. Hal itu bergantung pada sudut-sudut yang dimiliki kedua segitiga itu, sejenis atau tidak.

Perhatikan gambar 1.37 di samping!

Tampak bahwa: $AC = DF$; $CB = FE$; $\angle B = \angle E$.

Kedua segitiga itu memiliki dua sisi dan satu sudut yang tidak diapit oleh dua sisi yang sama (S, S, Sd) dan tampak bahwa $\Delta\,ABC \cong \Delta DEF$. Hal ini disebabkan kedua jenis segitiga itu sama, yaitu sama-sama segitiga lancip.

Sekarang perhatikan gambar 1.38 berikut ini!

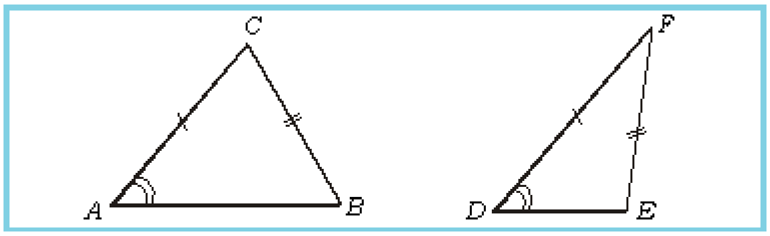


Gambar 1.37
Segitiga *ABC* dan segitiga *DEF*

Kesimpulan:

Dua segitiga dikatakan kongruen jika memenuhi salah satu syarat berikut.

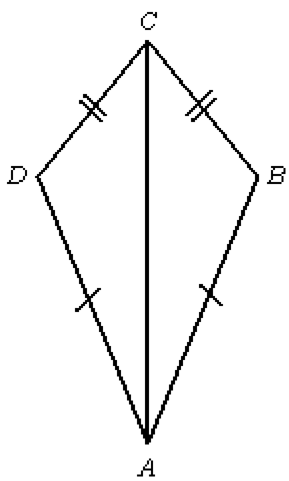
1. (S, S, S) sama; atau
2. (S, Sd, S) sama; atau
3. (Sd, S, Sd) sama; atau
4. (Sd, Sd, S) sama; atau
5. (S, S, Sd) sama dan jenis segitiga sama.



Gambar 1.38
Segitiga ABC lancip dan segitiga DEF tumpul

Tampak bahwa: $AC = DF$; $BC = EF$; $\angle A = \angle D$.

ΔABC dan ΔDEF mempunyai dua sisi dan satu sudut yang tidak diapit oleh dua sisi tersebut sama (S, S, Sd). Akan tetapi, ΔABC tidak kongruen dengan ΔDEF . Hal itu disebabkan kedua segitiga itu jenisnya berbeda. ΔABC lancip sedangkan ΔDEF tumpul.



Gambar 1.39
Layang-layang $ABCD$

Contoh soal 19:

Perhatikan gambar layang-layang $ABCD$!

a) Buktikan $\Delta ABC \cong \Delta ACD$!

b) Sebutkan sudut-sudut yang sama besar!

Jawab:

a) $CD = CB$ diketahui

$AD = AB$ diketahui

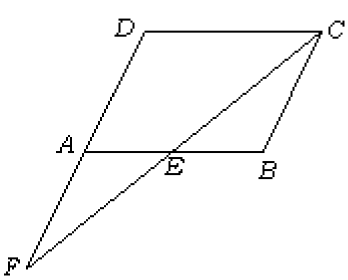
$AC = AC$ diketahui

$\therefore \ \Delta ABC \cong \Delta ACD$ (S, S, S)

b) $\angle D = \angle B$

$\angle DCA = \angle ACB$

$\angle DAC = \angle CAB$



Gambar 1.40
Jajargenjang $ABCD$ dan E titik tengah AB.

Contoh soal 20:

$ABCD$ jajargenjang dan E titik tengah AB. Buktikan $\Delta FEA \cong \Delta EBC$!

Bukti:

$AE = EB$ (karena E titik tengah)

$\angle AEF = \angle BEC$ (sudut bertolak belakang)

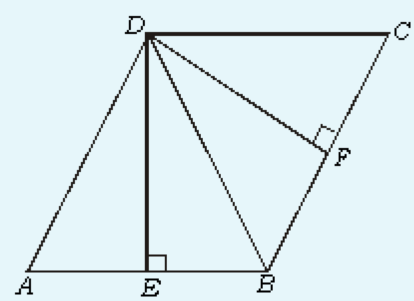
$\angle EAF = \angle EBC$ (sudut dalam berseberangan)

$\therefore \ \Delta EFA \cong \Delta EBC$ (Sd, S, Sd)

LATIHAN 6

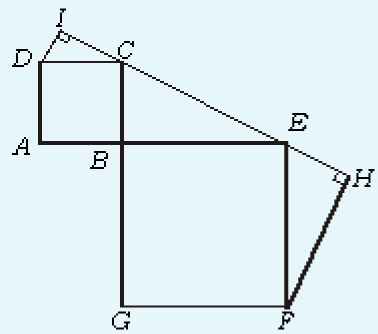
Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

1. a. Gambarlah ΔABC dengan panjang $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm, dan $AC = 7$ cm dengan alas AC! Gambar pula ΔPQR dengan panjang $PR = 6$ cm, $PQ = 7$ cm, dan $QR = 5$ cm dengan alas PR!
   b. Dengan busur derajat, ukurlah besar ketiga sudut pada ΔABC dan ΔPQR!
   c. Apakah ΔABC dan ΔPQR kongruen?
2. a. Gambarlah ΔABC dengan alas $AB = 8$ cm, $AC = 6$ cm, dan $\angle BAC = 30°$! Gambar pula ΔXYZ dengan alas $XY = 6$ cm, $YZ = 8$ cm, dan $\angle XYZ = 30°$!
   b. Ukurlah panjang sisi BC dan XZ!
   c. Ukur pula dengan busur derajat $\angle ACB$, $\angle CAB$, $\angle YXZ$, dan $\angle XZY$!
   d. Apakah sisi-sisi yang bersesuaian sama panjang?
   e. Apakah sudut-sudut yang bersesuaian sama besar?
   f. Apakah kedua segitiga tersebut kongruen?
3. a. Gambarlah ΔDEF dengan panjang alas $DE = 6$ cm, $\angle DEF = 45°$, dan $\angle EDF = 30°$! Gambarkan pula ΔKLM dengan panjang $KL = 6$ cm, $\angle KLM = 30°$, dan $\angle LKM = 45°$!
   b. Ukurlah panjang sisi DF, EF, KM, dan LM!
   c. Ukurlah pula besar sudut DEF dan sudut KML!
   d. Apakah sisi-sisi yang bersesuaian sama panjang?
   e. Apakah sudut-sudut yang bersesuaian sama besar?
   f. Apakah kedua segitiga tersebut kongruen?
4. Diketahui ΔDEF dengan alas $DE = 4$ cm, $\angle DEF = \angle EDF = 60°$ dan ΔKLM dengan alas $KL = 4$ cm, $\angle KLM = \angle LKM = 60°$. Kongruenkah kedua segitiga tersebut?
5. Belah ketupat $ABCD$ terbentuk dari dua segitiga sama sisi yang kongruen. $DE \perp AB$ dan $DF \perp BC$.



   a. Sebutkan dua segitiga sama sisi yang kongruen!
   b. Buktikan $\Delta DAE \cong \Delta DFC$!
   c. Buktikan $\Delta DEB \cong \Delta DFB$!
6. Diketahui $\overline{AC}$ sebuah ruas garis, B titik tengah ruas garis itu, dan g adalah garis yang melalui B dan tegak lurus $\overline{AC}$. Jika D titik pada g maka:
   a. lukislah keadaan tersebut;
   b. buktikan $\Delta ABD \cong \Delta CBD$!
7. Segitiga ABC adalah segitiga sembarang. D pada $\overline{BC}$ sehingga $\overline{AD}$ garis bagi sudut A. E pada $\overline{AC}$ sehingga $\overline{BE}$ garis bagi sudut B. P pada $\overline{AB}$, Q pada $\overline{BC}$, dan O adalah titik potong $\overline{AD}$ dan $\overline{BE}$. Jika $\overline{OP} \perp \overline{AB}$ dan $\overline{OQ} \perp \overline{BC}$, buktikan bahwa $OP = OQ$!

8. Perhatikan gambar di bawah ini!

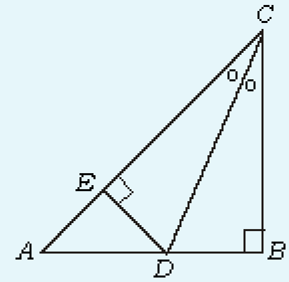


Buktikan bahwa:

a. $CE = DI + HF$;

b. L ΔBCE = L ΔDIC + L ΔEFH !

9. Pada gambar di bawah ini, ΔABC siku-siku sama kaki dan CD garis bagi sudut C.



a. Buktikan bahwa $\Delta DEC \cong \Delta BCD$!

b. Buktikan bahwa $AE = ED = DB$!

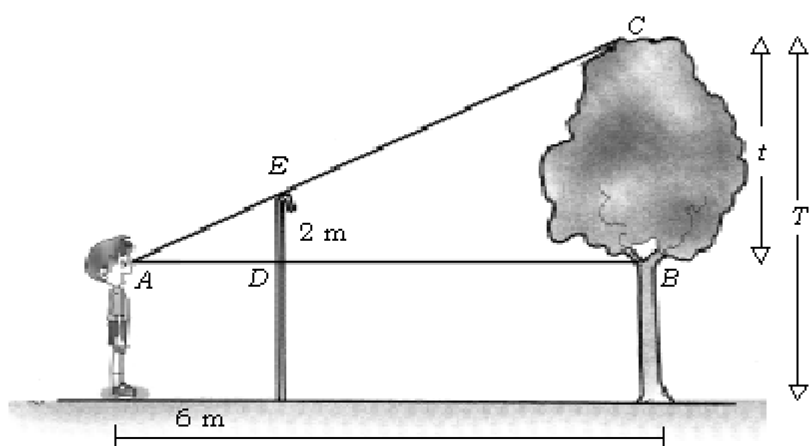
10. $PQRS$ adalah segi empat sembarang. T adalah titik di dalam $PQRS$ sedemikian sehingga $\overline{PT}$, $\overline{QT}$, $\overline{RT}$ adalah garis bagi $\angle P$, $\angle Q$, dan $\angle R$. Buktikan bahwa $\overline{ST}$ juga merupakan garis bagi $\angle S$!

1.3 Penerapan Kesebangunan

Setelah kita mempelajari dan mengenal tentang bangun-bangun yang kongruen dan sebangun, sekarang mari kita mencoba menyelesaikan soal cerita yang berkaitan dengan kongruensi dan kesebangunan segitiga.

Contoh soal 21:

Seorang anak ingin mengukur tinggi pohon dengan cara seperti pada gambar. Tentukan tinggi pohon itu seluruhnya!



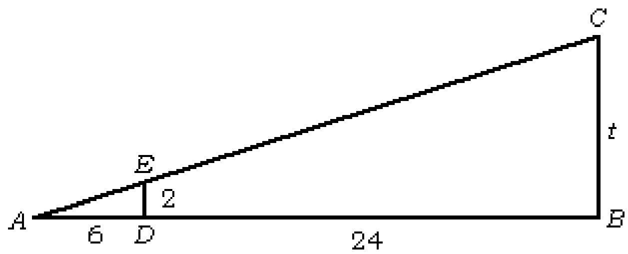
Gambar 1.41

Anak yang mengukur tinggi pohon

Jawab:

Tinggi anak dari kaki sampai mata 1,5 m. Anak berjarak 30 m dari pohon. Tongkat yang tingginya 3,5 m ditancapkan pada jarak 6 m dari anak itu sedemikian sehingga mata, ujung tongkat dan puncak pohon segaris.

Perhatikan segitiga di bawah ini!



Gambar 1.42

Segitiga ABC

Tinggi pohon (T) = t + tinggi anak

$\Delta ADE \sim \Delta ABC$, maka tinggi sebagian pohon (t) dapat dihitung dengan menggunakan perbandingan segitiga sebagai berikut.

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Leftrightarrow \frac{6}{30} = \frac{2}{t} \Leftrightarrow 6t = 30 \times 2 \Leftrightarrow t = \frac{30 \times 2}{6} = 10$$

Jadi, tinggi sebagian pohon (t) adalah 10 m.

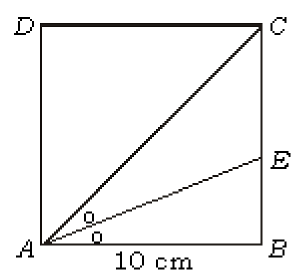
Tinggi pohon (T) = t + tinggi anak

$= 10 + 1,5 = 11,5$

Jadi, tinggi pohon seluruhnya adalah 11,5 m.

Contoh soal 22:

$ABCD$ adalah persegi, $\overline{AC}$ adalah diagonal, $\overline{AE}$ adalah garis bagi $\angle CAB$. Hitunglah panjang $\overline{BE}$!



Gambar 1.43

Persegi $ABCD$

Jawab:

Tariklah garis $EF \perp AC$. Perhatikan ΔABE dan ΔAEF!

$\angle B = \angle F = 90°$

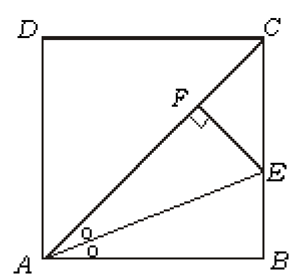
$\angle BAE = \angle EAF$ (diketahui)

$AE = AE$ (berimpit)

Jadi, $\Delta ABE \cong \Delta AEF$ (Sd, Sd, S)

Akibatnya, $\angle BEA = \angle AEF$; $BE = EF$; $AB = AF = 10$ cm.

Sekarang, perhatikan ΔCEF!



Gambar 1.44

Garis $\overline{EF}$ pada ΔABC

$\angle CFE = 90°$; $\angle FCE = 45°$, maka $\angle CEF = 180° - (90° + 45°) = 45°$

Jadi, ΔCEF siku-siku sama kaki. Akibatnya, $EF = FC$.

$FC = AC - AF$

$= (10\sqrt{2} - 10)$ cm

Karena $BE = EF$ dan $EF = FC$, maka $BE = FC = (10\sqrt{2} - 10)$ cm.

INFO MATEMATIKA

Orang Babilonia purba adalah perintis dalam cabang matematika. Tanah antara Sungai Tigris dan Eufrat, tempat tinggal orang Babilonia, semula berupa rawa. Kanal-kanal dibangun untuk mengeringkan rawa itu dan untuk menampung luapan air sungai. Untuk maksud pembangunan tanah mereka perlu meneliti tanah. Dalam melakukan hal itu orang Babilonia menciptakan kaidah-kaidah untuk mencari luas tanah. Kaidah-kaidah ini tidak terperinci benar tetapi pengetahuan yang mereka peroleh cukup untuk pembangunan kanal.

Di Mesir orang yang memiliki ladang pertanian di sepanjang tepi sungai Nil dikenakan pajak sesuai dengan tanah milik mereka. Dalam musim hujan, sungai akan meluap menggenangi tanah itu, dan menghanyutkan semua tanda-tanda batas pemilikan tanah. Oleh karena itu, orang perlu mengukur lagi tanah sehingga masing-masing pemilik tanah akan memperoleh bagian mereka yang sah. Setelah banjir surut, orang-orang yang telah dilatih secara khusus disebut tukang perentang tali akan menetapkan penunjuk batas baru. Mereka mengumpulkan simpul-simpul tali yang berjarak sama, sehingga mereka dapat mengukur panjang yang diinginkan dan membagi tanah itu ke dalam bentuk-bentuk segitiga, persegi panjang, dan trapesium.

Sumber: Ilmu Pengetahuan Populer Jilid 2

TUGAS KELOMPOK

Kerjakan tugas berikut bersama dengan 3 orang temanmu! Selanjutnya tulis dan laporkan hasil yang diperoleh!

1. Bagaimana caranya mengukur lebar sungai, tanpa harus menyeberangi sungai tersebut?

   Langkah-langkah yang kalian harus lakukan adalah:

   a. Cari benda atau pohon di seberang sungai sebagai tanda!

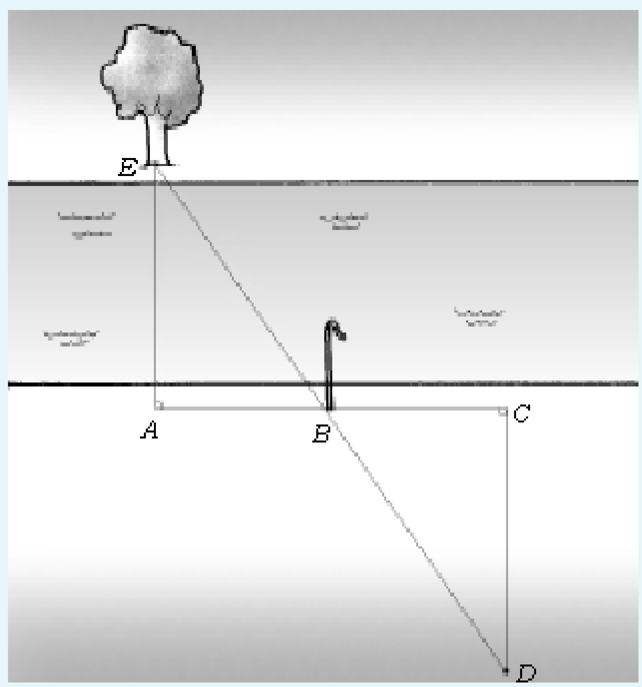
   b. Berdirilah di titik A sehingga AE tegak lurus arah aliran air sungai!

   c. Berjalanlah beberapa meter ke titik B, tancapkan tongkat!

   d. Berjalanlah ke titik C, sehingga $AB = BC$!

   e. Berjalanlah ke titik D sehingga titik B, D, dan E segaris!

   f. Ukurlah CD! Jadi, CD adalah lebar sungai itu!



Gambar 1.45

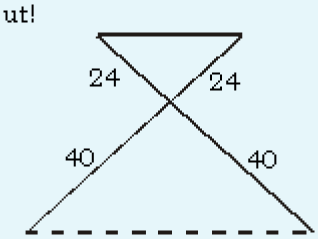
Cara mengukur lebar sungai

2. Perkirakan tinggi tiang bendera dengan menggunakan tongkat dan bayangannya! Tulislah langkah-langkah yang dapat kamu lakukan!

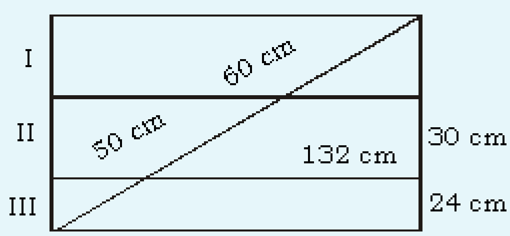
LATIHAN 7

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

1. Gambar di bawah ini adalah tampak samping sebuah kursi lipat. Jika jarak kedua ujung kaki kursi pada tanah yakni 50 cm, hitunglah lebar kursi tersebut!



2. Sebuah pintu pagar dibuat dari tiga papan kayu yang diperkuat dengan sepotong besi dengan posisi diagonal, seperti gambar di bawah ini.



Hitunglah:

a. lebar papan kayu;

b. panjang pintu pagar;

c. luas papan kayu yang diperlukan!

3. Pada suatu sore yang cerah, sebuah pohon dan tonggak bambu setinggi 3 m membentuk bayangan di tanah datar karena sinar matahari. Panjang bayangan tonggak 4 m, sedangkan panjang bayangan pohon 5 m. Berapa tinggi pohon tersebut?

4. Sebuah meja diletakkan menempel pada tembok. Tangga aluminium disandarkan pada tembok tersebut dan menyinggung meja. Tinggi meja 72 cm, lebar meja 48 cm, dan kaki tangga berjarak 144 cm dari tembok.

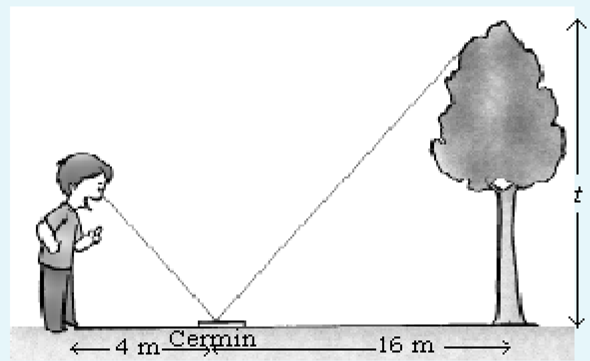
   a. Gambarlah susunan seperti keterangan tersebut!

   b. Hitunglah:

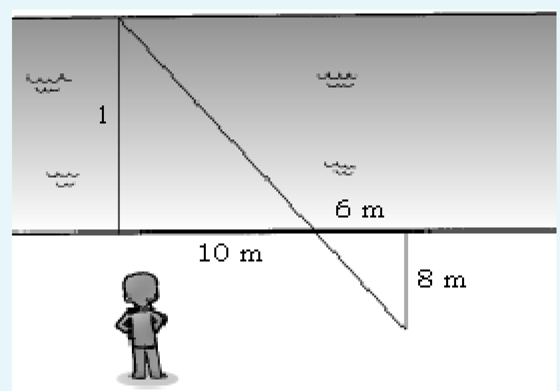
      (i) panjang tangga aluminium;

      (ii) tinggi ujung atas tangga dari lantai!

5. Seorang anak yang tingginya 1,5 m hendak mengukur tinggi pohon dengan menggunakan cermin seperti terlihat pada gambar. Tentukanlah tinggi pohon itu?



6. Gambar di bawah ini menunjukkan seorang anak hendak mengukur lebar sungai. Tentukan lebar sungai tersebut!

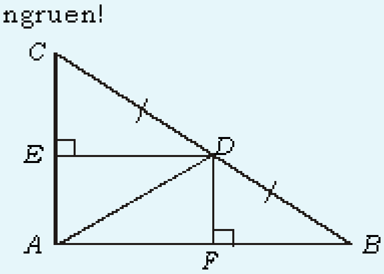


7. Segitiga ABC siku-siku di A, $\angle ACB$ = 60°, $\overline{AD}$ garis berat, $\overline{DE} \perp \overline{AC}$, dan $\overline{DF} \perp \overline{AB}$.

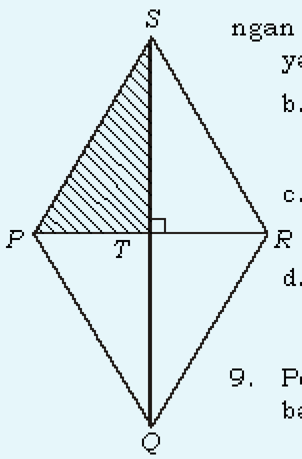
   a. Tentukan besar $\angle ABD$ dan $\angle BAD$!

   b. Buktikan bahwa $\overline{BC} = 2\,\overline{AC}$!

   c. Sebutkan pasangan segitiga yang kongruen!



8. Belah ketupat $PQRS$ di bawah ini terbentuk dari empat segitiga siku-siku yang kongruen. Panjang $\overline{PT} = 120$ cm dan $TS = 160$ cm.



ngan menggunakan skala yang kamu kehendaki!

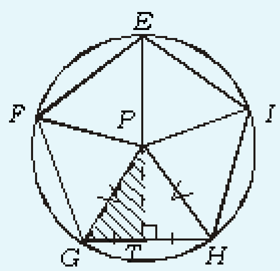
b. Ukurlah besar $\angle TPS$ dan $\angle PST$?

c. Ukurlah panjang PS sebenarnya?

d. Berapa besar $\angle SPQ$ dan $\angle PSR$?

9. Perhatikan gambar di bawah ini!

Gambar tersebut menunjukkan segi lima beraturan yang terbentuk dari lima segitiga sama kaki kongruen atau 10 segitiga siku-siku kongruen.



a. Tentukan besar $\angle GPH$!

b. Berapa besar $\angle GPT$?

c. Jika panjang $PG = 10$ cm, lukislah ΔPGT !

d. Berapa besar $\angle PGT$ (dengan mengukur dan menghitung)?

e. Berapa besar $\angle HGF$?

f. Berapa derajat jumlah sudut-sudut dalam segi lima?

10. Dari soal dan keterangan soal nomor 9, tentukan:

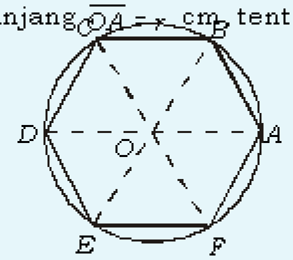
a. panjang $\overline{GT}$;

b. panjang $\overline{GH}$;

c. keliling segi lima $EFGHI$!

11. Segi enam beraturan di bawah ini terbentuk dari enam segitiga sama sisi kongruen.

Jika panjang $\overline{OA} = r$ cm, tentukan:



a. panjang $\overline{AB}$;

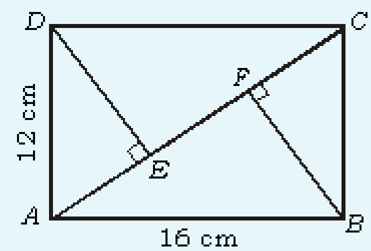
b. keliling segi enam beraturan $ABCDEF$;

c. besar $\angle BAF$;

d. jumlah besar sudut-sudut dalam segi enam beraturan!

12. Perhatikan persegi panjang $ABCD$ di bawah ini!

a. Buktikan bahwa:



(i) $\Delta ABC \cong \Delta ACD$;

(ii) $\Delta DEC \cong \Delta ABF$;

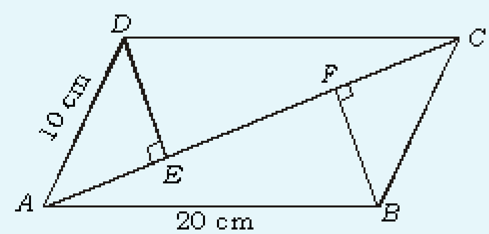
(iii) $\Delta ADE \cong \Delta BCF$!

b. Hitunglah panjang $\overline{AC}$!

c. Hitunglah panjang $\overline{DE}$!

d. Hitunglah panjang $\overline{EF}$!

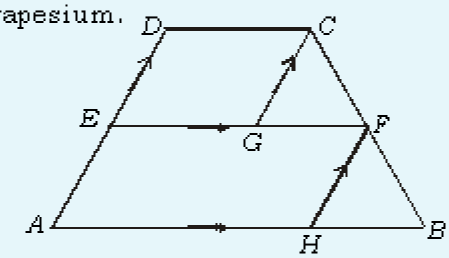
13. $ABCD$ pada gambar berikut ini adalah jajargenjang.



a. Buktikan bahwa $\Delta ADE \cong \Delta BCF$!

b. Jika $\angle ABC = 120°$, hitunglah panjang $\overline{EF}$!

14. $ABCD$ pada gambar berikut ini adalah trapesium.



$\overline{DC} = 5$ cm , $\overline{AB} = 15$ cm , $\overline{AD} = 10$ cm , dan $\angle B = 60°$. E pada $\overline{AD}$ dan F pada $\overline{BC}$ sehingga $\overline{EF} \parallel \overline{DC} \parallel \overline{BE}$, $\overline{DE} = \overline{AE}$.

a. Buktikan bahwa $\Delta CGF \cong \Delta BFH$!

b. Hitunglah panjang $\overline{EF}$!

c. Hitunglah keliling $DCFE$ dan $ABCD$!

d. Hitunglah luas $ABCD$!

RANGKUMAN

- Bangun-bangun yang kongruen dan sebangun.
  a. Dua buah bangun dikatakan kongruen jika:
     - memiliki ukuran-ukuran sisi yang sama.
     - memiliki ukuran-ukuran sudut yang sama.

  b. Dua buah bangun dikatakan sebangun jika:
     - sudut-sudut yang seletak sama besar.
     - sisi-sisi yang seletak mempunyai perbandingan sisi yang sama.

  c. Jika dua buah bangun kongruen maka kedua bangun itu pasti sebangun, tetapi tidak sebaliknya.

- Skala = $\dfrac{\text{ukuran pada gambar}}{\text{ukuran sebenarnya}}$

- Segitiga-segitiga yang sebangun.

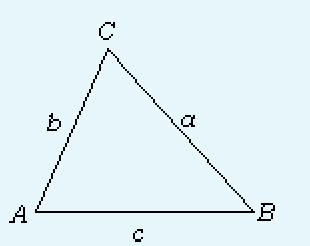
  Dua segitiga dikatakan sebangun jika memenuhi salah satu syarat berikut:

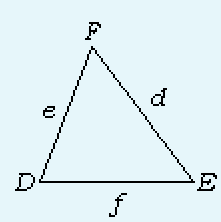
  a. dua sudutnya sama besar.

  b. sisi-sisi yang seletak mempunyai perbandingan yang sama.

  c. satu sudut dan dua sisi yang mengapit sudut itu mempunyai perbandingan yang sama.

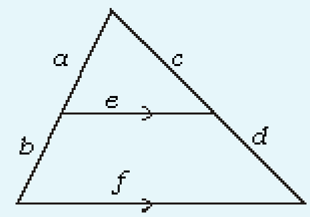
- Perhatikan gambar di bawah ini!





  - Jika $\dfrac{a}{d} = \dfrac{b}{e} = \dfrac{c}{f}$, maka $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, dan $\angle C = \angle F$.
  - Jika $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, dan $\angle C = \angle F$, maka $\dfrac{a}{d} = \dfrac{b}{e} = \dfrac{c}{f}$.

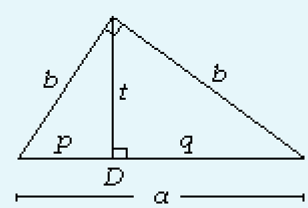
- Perhatikan gambar di bawah ini!



  a. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$

  b. $\dfrac{a}{a+b} = \dfrac{c}{c+d} = \dfrac{e}{f}$

- Perhatikan gambar di bawah ini!

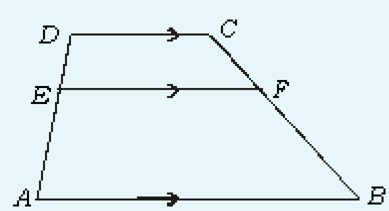


  a. $t^2 = p \cdot q$

  b. $b^2 = p \cdot a$

  c. $c^2 = q \cdot a$

- Perhatikan gambar di bawah ini!



  Panjang $\overline{EF} = \dfrac{AB \cdot DE + DC \cdot AE}{AD}$

EVALUASI

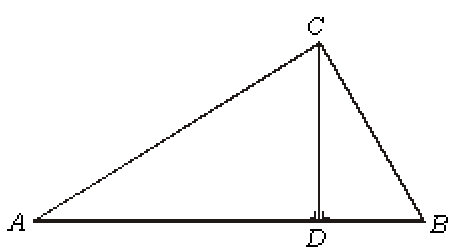
I. Pemahaman Konsep

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini!

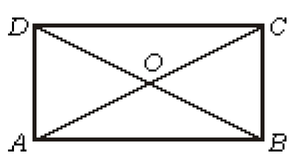
1. Sebuah mobil panjangnya 4,5 m; tingginya 1,5 m; dan lebarnya 1,8 m. Jika dibuat model yang panjangnya 60 cm, berapa tinggi dan lebar model mobil tersebut?

2. Pada sebuah gambar dengan skala $1:1.000$, tinggi sebuah gedung 5 cm.
   a. Berapa tinggi gedung sebenarnya?
   b. Jika panjang gedung bagian depan 20 m, berapa panjangnya dalam gambar?

3. Sebuah segitiga ABC siku-siku di C, $\overline{CD}$ garis tinggi. Jika BD = 5 cm dan BC = 10 cm maka:
   a. tunjukkan dua segitiga yang sebangun dengan segitiga ACD;
   b. hitunglah panjang $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, dan $\overline{AC}$!

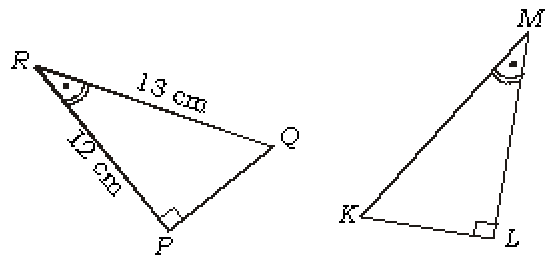


4. Perhatikan gambar di bawah ini!



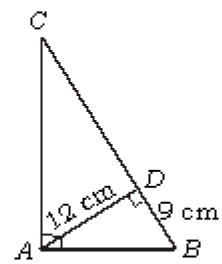
Titik O adalah perpotongan diagonal persegi panjang $ABCD$. Sebutkan segitiga yang kongruen dengan:
   a. ΔAOB
   b. ΔAOD
   c. ΔABC

5. Diketahui $\Delta PQR \cong \Delta KLM$ dan $\angle PQR = 60°$. Perhatikanlah gambar berikut ini!

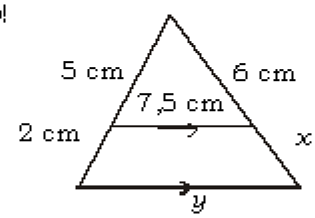


Tentukanlah:
   a. besar $\angle PRQ$;
   b. besar $\angle LKM$;
   c. besar $\angle KML$;
   d. panjang $\overline{KL}$;
   e. panjang $\overline{KM}$!

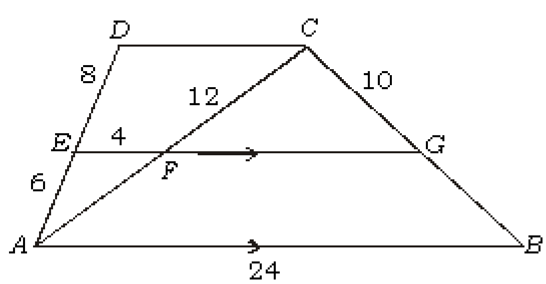
6. Diketahui $AD = 12$ cm dan $BD = 9$ cm. Hitunglah panjang $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, dan $\overline{AC}$!



7. Dari gambar di bawah ini, tentukan nilai x dan y!



8. Pada gambar di bawah ini, satuannya adalah cm.

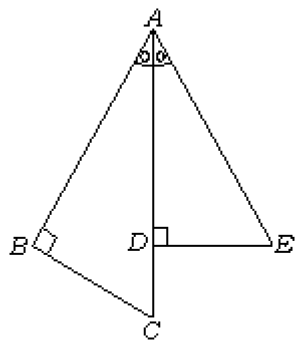


Tentukan panjang:
   a. $\overline{DC}$;
   b. $\overline{AF}$;
   c. $\overline{FG}$;
   d. $\overline{GB}$!

II. Penalaran dan Komunikasi

Selesaikanlah soal-soal di bawah ini!

1. Diketahui $AC = AE$ dan $\angle BAC = \angle DAE$.



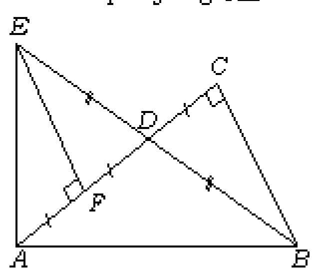
   a. Buktikan $\Delta ABC \cong \Delta ADE$!

   b. Jika $CD = 2$ dan $AE = 10$, tentukanlah panjang $\overline{BC}$ dan $\overline{AB}$!

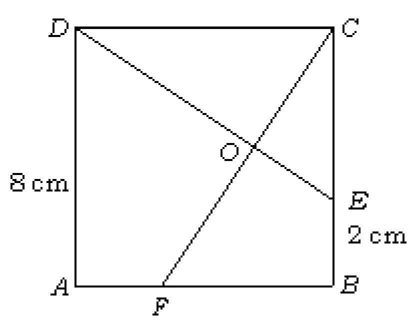
2. Perhatikan gambar di bawah ini! Jika $AB = 13$ cm dan $EF = 5$ cm, maka

   a. Tentukan panjang $\overline{AC}$!

   b. Tentukan panjang $\overline{AE}$!



3. $ABCD$ adalah persegi panjang.



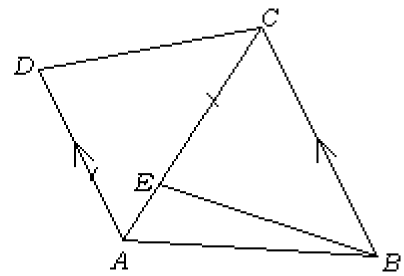
   Jika $DE = CF$, maka tentukanlah panjang:

   a. $\overline{DE}$; b. $\overline{OE}$;

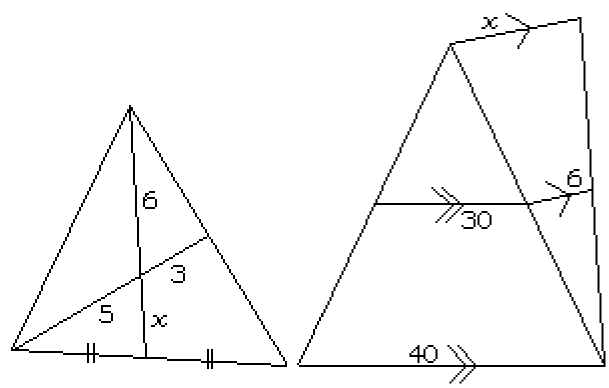
   c. $\overline{OD}$; d. $\overline{OC}$;

   e. $\overline{OF}$!

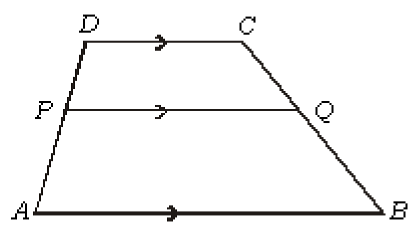
4. Jika diketahui $AC = BC$ dan $AD = CE$, maka buktikan bahwa $\Delta ACD \cong \Delta BCE$!



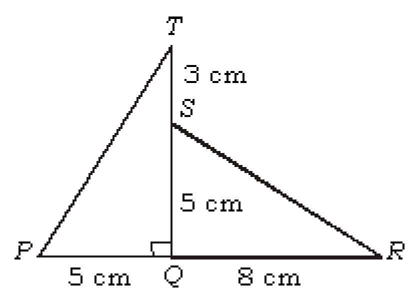
5. Tentukanlah nilai x!



6. Diketahui trapesium $ABCD$. $\overline{AB} \parallel \overline{PQ} \parallel \overline{DC}$ dengan $AP : PD = 3 : 2$. Jika $AB = 20$ cm dan $DC = 15$ cm. Hitunglah PQ!



7. Perhatikanlah gambar di bawah ini!



   a. Buktikan $\Delta PQT \cong \Delta QRS$!

   b. Sebutkan pasangan-pasangan sisi dan sudut yang sama!

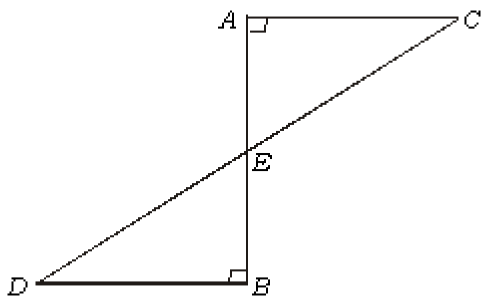
8. $\Delta ACE \cong \Delta BDE$

   $AC = DB = 8$ cm

   $DC = 20$ cm

   a. Hitunglah panjang $\overline{AB}$, $\overline{DE}$, dan $\overline{CE}$!

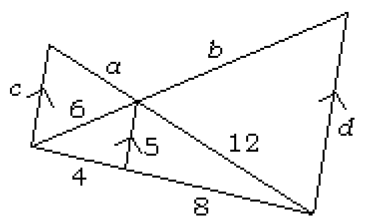
   b. Tentukan pasangan sudut yang sama!



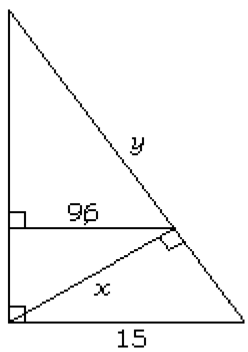
III. Pemecahan Masalah

Selesaikanlah soal-soal di bawah ini!

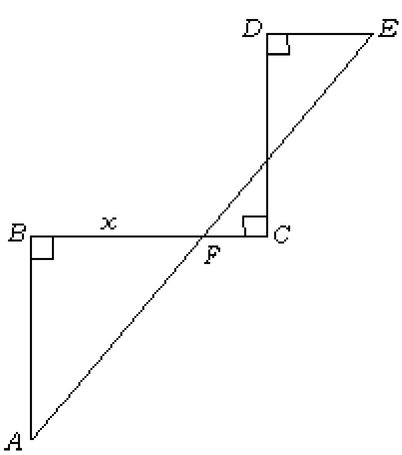
1. Tentukanlah nilai a, b, c, dan d!



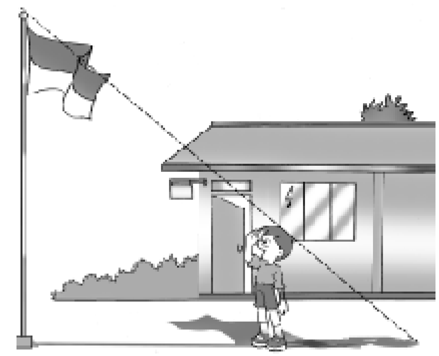
2. Tentukanlah nilai x dan y!



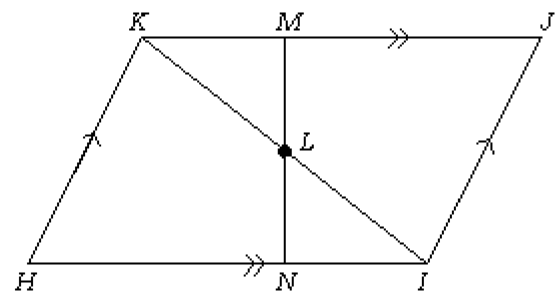
3. Tentukanlah nilai x, jika $AB = BC = CD = 10$ cm dan $DE = 2$ cm!



4. Seorang anak berada di 2,5 m dari sebuah tiang bendera. Tinggi anak tersebut 1,5 m. Jika bayangan dari puncak tiang bendera berimpit dengan bayangan anak tersebut, tentukan tinggi tiang bendera! Diketahui pula, panjang bayangan tiang bendera adalah 6 m.



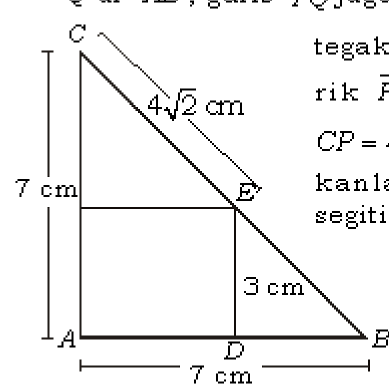
5. Perhatikan gambar di bawah ini!



$HIJK$ adalah sebuah jajargenjang. Titik L adalah titik tengah $\overline{IK}$. Melalui titik L ditarik sebuah garis sembarang yang memotong $\overline{HI}$ di titik N dan memotong $\overline{JK}$ di titik M. Buktikan bahwa $LM = LN$!

6. Selembar foto berukuran $20 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$ ditempelkan pada selembar karton. Sisi karton pada sebelah kiri, kanan, dan atas sama, yaitu 2,5 cm, tetapi pada sisi bawah tidak sama. Agar foto sebangun dengan karton, berapa lebar karton bagian bawah yang tidak tertutup foto? (ada dua macam jawaban).

7. Dalam ΔABC terdapat 7 buah segitiga yang saling sebangun dan 4 buah segitiga yang kongruen. Diketahui $CE = 4\sqrt{2}$ cm dan $DE = 3$ cm. Tentukan titik L pada $\overline{EF}$ demikian sehingga $DL = BE$, kemudian tarik garis $\overline{PQ}$ dengan P di $\overline{BC}$ dan Q di $\overline{AB}$, garis $\overline{PQ}$ juga melalui L dan tegak lurus $\overline{AB}$. Tarik $\overline{PR} \perp \overline{AC}$ dengan $CP = \sqrt{2}$ cm. Temukanlah kesebelas segitiga tersebut!



Bab 2

Bangun Ruang Sisi Lengkung

Gambar 2.1

Museum Purna Bakti di Taman Mini Indonesia Indah

Sumber: Indonesian Heritage

Bangun ruang sisi lengkung, sebenarnya sudah pernah kamu pelajari di Sekolah Dasar. Ada banyak benda-benda di sekitar kita yang berbentuk bangun ruang sisi lengkung. Misalnya saja tumpeng, drum minyak, kaleng roti, bola basket, bola kaki, bola voli, dan masih banyak lagi contoh yang bisa kamu dapatkan. Cobalah kamu perhatikan gambar di atas! Kamu pasti tidak asing lagi dengan gambar di atas. Gambar itu adalah Museum Purna Bakti di Taman Mini Indonesia Indah. Museum di atas adalah suatu contoh bangun ruang sisi lengkung yang berbentuk kerucut. Dapatkah kamu mencari contoh lain yang termasuk bangun ruang sisi lengkung yang berbentuk tabung dan bola?

Pada bab kedua ini, kita akan membahas tentang bangun ruang sisi lengkung. Materi yang akan kita pelajari antara lain unsur-unsur bangun ruang sisi lengkung, luas sisi dan volume bangun ruang sisi lengkung, dan penyelesaian masalah bangun ruang sisi lengkung.

Diskusi Pembuka

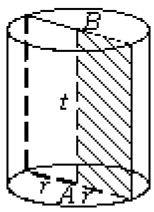
1. Apa yang kamu ketahui tentang bangun ruang sisi lengkung?
2. Bangun apa saja yang masuk ke dalam bangun ruang sisi lengkung?
3. Beri contoh bangun-bangun ruang di sekitarmu yang mempunyai sisi lengkung?

2.1 Unsur-unsur Bangun Ruang Sisi Lengkung

Dalam buku jilid 3 ini, kita akan belajar tentang bangun ruang di antaranya adalah tabung, kerucut, dan bola.

2.1.1 Tabung

Salah satu contoh benda yang sering kita lihat yang berbentuk tabung adalah kaleng cat/kaleng susu. Bagian bawah sebuah kaleng berbentuk lingkaran dan sisinya tegak lurus bidang dasar, sehingga tabung disebut juga prisma yang alasnya berbentuk lingkaran.



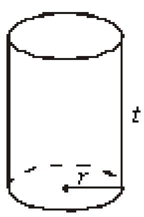
Gambar 2.2
Tabung dengan jari-jari alas r

A. Unsur-unsur tabung

Gambar 2.2 menunjukkan sebuah tabung dengan jari-jari alasnya r. Ruas garis AB merupakan tinggi tabung (t). Sisi alas dan tutup masing-masing berbentuk lingkaran. Kedua lingkaran tersebut kongruen. Sisi lengkung tabung disebut *selimut tabung*. Sebuah tabung memiliki tiga sisi yaitu sisi alas, tutup, dan selimut tabung.

Sifat-sifat yang dimiliki oleh tabung antara lain:

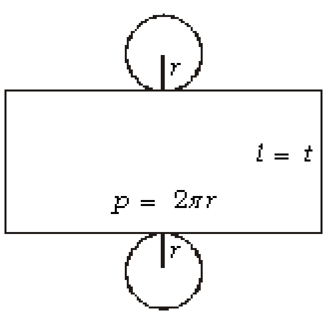
1. memiliki alas dan tutup yang sejajar dan kongruen
2. memiliki 3 sisi
3. memiliki 2 rusuk lengkung



Gambar 2.3 (a)
Tabung dengan jari-jari alas r

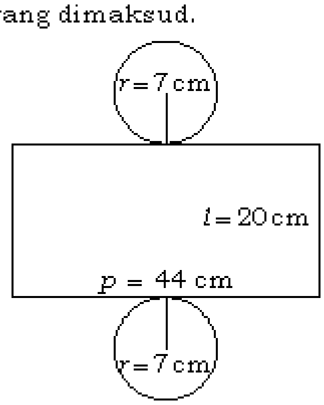
B. Melukis jaring-jaring tabung

Untuk membuat sebuah tabung, terlebih dahulu kita buat atau kita lukis jaring-jaringnya. Gambar 2.3(a) menunjukkan sebuah tabung dengan jari-jari alas r dan tinggi t. Pada gambar 2.3(b) menunjukkan jaring-jaring tabung. Perhatikan bahwa jaring-jaring tersebut terdiri atas dua lingkaran masing-masing dengan jari-jari r, dan sebuah persegi panjang dengan panjang p = keliling lingkaran = $2\pi r$ dan lebar l = tinggi tabung = t!

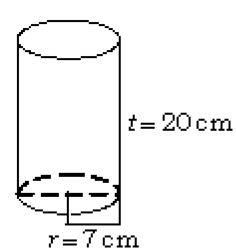


Gambar 2.3 (b)
Jaring-jaring tabung

Sekarang, perhatikan contoh berikut! Amir ingin membuat tabung dari kertas karton dengan ketentuan jari-jari alas tabung 7 cm dan tinggi tabung 20 cm. Amir mulai melukis jaring-jaring tabung dengan r = 7 cm, l = 20 cm, dan $p = 2 \times \frac{22}{7} \times 7$ cm = 44 cm. Perhatikan gambar 2.4! Gambar 2.4(a) menunjukkan jaring-jaring sebuah tabung, dan gambar 2.4(b) menunjukkan tabung yang dimaksud.



Gambar 2.4 (a)
Jaring-jaring tabung

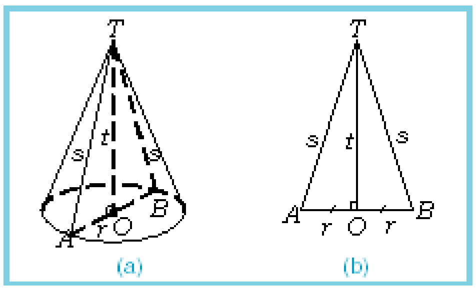


Gambar 2.4 (b)
Tabung dengan jari-jari alas r

2.1.2 Kerucut

Kerucut merupakan bentuk limas dengan bidang alasnya lingkaran. Bentuk kerucut dapat juga dibuat dengan memegang sebuah ujung tali dan memutar tali itu mengikuti sebuah jalur yang berbentuk lingkaran. Jika puncak kerucut tepat berada di atas pusat lingkaran maka kerucut itu disebut *kerucut tegak lurus*. Bila puncak kerucut tidak berada tepat di atas pusat lingkaran maka disebut *kerucut miring*.

A. Unsur-unsur kerucut



Gambar 2.5
Kerucut dengan tinggi TO dan alas yang berupa lingkaran

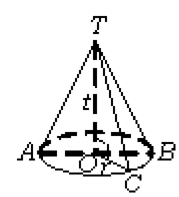
Gambar 2.5(a) menunjukkan sebuah kerucut yang tingginya TO dan alasnya berupa lingkaran berpusat di titik O dan berjari-jari r.

AT dan BT masing-masing merupakan contoh garis pelukis kerucut (s).

Sebuah kerucut memiliki sebuah sisi alas yang berbentuk lingkaran dan sebuah sisi lengkung yang disebut *selimut kerucut*. Jadi, sebuah kerucut memiliki dua sisi.

Jika kita perhatikan gambar 2.5(a) dan gambar 2.5(b), segitiga TAO siku-siku di titik O. AO (r) dan TO (t) masing-masing merupakan sisi siku-siku dan AT (s) merupakan sisi miring. Jadi, dalam sebuah kerucut selalu berlaku hubungan:

$$\boxed{s^2 = r^2 + t^2}$$



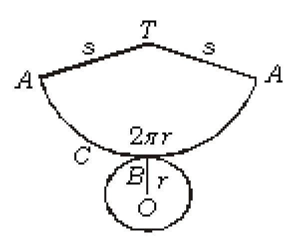
Gambar 2.6 (a)
Kerucut dengan jari-jari alas r

Sifat-sifat yang dimiliki oleh kerucut antara lain:

1. memiliki 2 sisi
2. memiliki 1 rusuk lengkung
3. memiliki 1 titik sudut

B. Melukis jaring-jaring kerucut

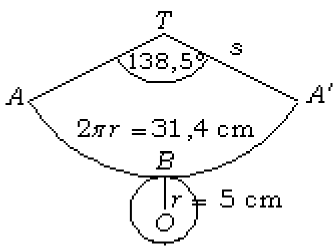
Untuk membuat sebuah kerucut, terlebih dahulu kita buat jaring-jaringnya. Gambar 2.6(a) menunjukkan sebuah kerucut dengan jari-jari alas r, tinggi t, dan garis pelukis s, sedangkan gambar 2.6(b) menunjukkan jaring-jaringnya.



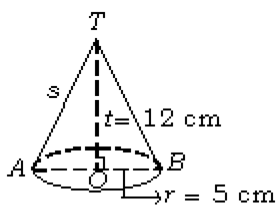
Gambar 2.6 (b)
Jaring-jaring kerucut

Sekarang perhatikan contoh berikut! Deasy diberi tugas oleh gurunya untuk membuat kerucut dengan ketentuan panjang jari-jari alas kerucut 5 cm dan tinggi kerucut 12 cm. Mula-mula, Deasy menghitung $2\pi r = 2 \times 3{,}14 \times 5$ cm $= 31{,}4$ cm, dan $s = \sqrt{r^2 + t^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} \times 1$ cm $= \sqrt{169}$ cm $= 13$ cm. Setelah itu, Deasy melukis jaring-jaring kerucut pada kertas karton atau pada bahan yang lain, sesuai dengan ukuran-ukuran tersebut.

Perhatikan gambar 2.7(a) dan 2.7(b)! Gambar tersebut dilukis dengan skala 1 : 5. Gambar 2.7(a) menunjukkan jaring-jaring



Gambar 2.7 (a)
Jaring-jaring kerucut



Gambar 2.7 (b)
Kerucut dengan jari-jari alas 5 cm

kerucut yang dibuat Deasy, dan gambar 2.7(b) menunjukkan kerucut yang dimaksud.

Untuk melukis jaring-jaring selimut kerucut $TABA'$ pada gambar 2.7(a), dapat juga dengan cara menghitung besar sudut ATA' sebagai berikut:

$$\frac{\text{Sudut } ATA'}{360^\circ} = \frac{\text{Panjang busur } ABA'}{\text{Keliling lingkaran berpusat di } T}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{Sudut } ATA'}{360^\circ} = \frac{2\pi r}{2\pi s} = \frac{r}{s} = \frac{5}{13}$$

$$\Leftrightarrow \text{Sudut } ATA' = \frac{5 \times 360^\circ}{13}$$

$$= 138{,}46^\circ \approx 138{,}5^\circ \text{ (dibulatkan 1 tempat desimal)}$$

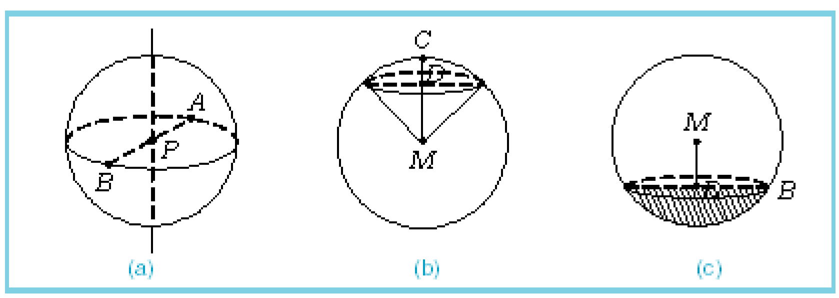
Dengan busur derajat, sudut tersebut dapat dilukis.

2.1.3 Bola

Bila bangun setengah lingkaran diputar sejauh 360° pada garis tengahnya, maka diperoleh bangun yang disebut *bola*. Permukaan bola atau kulit bola disebut juga *bidang bola*. Ruas garis yang melalui pusat bola dan berakhir pada bidang bola disebut *garis tengah bola*. Perhatikan gambar 2.8(a) di bawah ini. Titik A dan B dinamakan *dua titik yang diametral*. Gambar 2.8(b) menunjukkan *juring bola*, yaitu bangun yang dibatasi oleh bagian bidang bola dan kerucut yang titik puncaknya berimpit dengan titik pusat bola. Gambar 2.8(c) merupakan *tembereng bola*.

Sifat-sifat yang dimiliki oleh bola antara lain:

1. memiliki 1 sisi
2. semua titik pada bola berjarak sama ke titik pusatnya

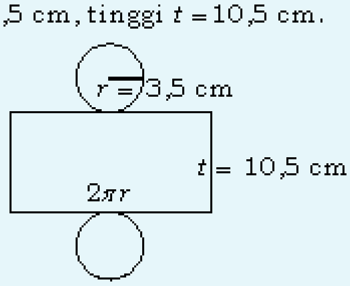


Gambar 2.8
Bola

LATIHAN 1

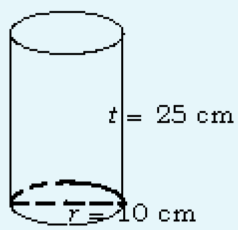
Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

1. Gambar di bawah ini menunjukkan jaring-jaring tabung dengan jari-jari alas r = 3,5 cm, tinggi t = 10,5 cm.

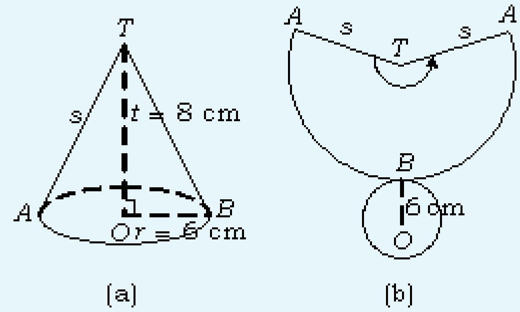


   a. Jika $\pi = \frac{22}{7}$, berapa cm panjang $2\pi r$?
   b. Lukislah dengan ukuran yang sebenarnya, jaring-jaring tersebut pada kertas manila!
   c. Guntinglah jaring-jaring tersebut dan bentuklah tabung!
2. Lukislah jaring-jaring tabung dengan jari-jari alas 5 cm dan tinggi 15 cm!
3. Lukislah jaring-jaring tabung terbuka dengan jari-jari alas 14 cm dan tinggi 21 cm!

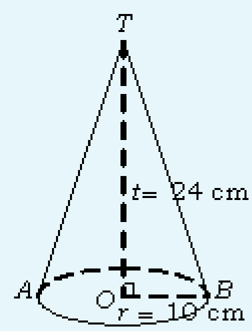
4. Lukislah jaring-jaring tabung terbuka dengan jari-jari alas 2,5 cm dan tinggi 10 cm!
5. Gambar di bawah ini menunjukkan sebuah tabung dengan jari-jari alas r = 10 cm dan tinggi t = 25 cm. Buatlah tabung dari kertas manila seperti tampak pada gambar di bawah ini!



6. Gambar berikut ini menunjukkan kerucut (a) dan jaring-jaringnya (b). Jari-jari alas kerucut itu adalah 6 cm dan tingginya 8 cm.
   a. Hitunglah panjang garis pelukis (s)!
   b. Dengan mengingat: $\frac{\text{sudut } TABA'}{360°} = \frac{2\pi r}{2\pi s}$, hitunglah besar sudut $TABA'$!
   c. Lukislah jaring-jaring kerucut gambar (b) di bawah ini pada kertas manila!
   d. Guntinglah jaring-jaring tersebut, lalu bentuklah kerucut!



7. Lukislah jaring-jaring kerucut dengan jari-jari alas 4 cm dan tingginya 3 cm!
8. Lukislah jaring-jaring kerucut dengan jari-jari alas 8 cm dan tingginya 15 cm!
9. Lukislah jaring-jaring kerucut dengan jari-jari alas 21 cm dan tingginya 28 cm!
10. Gambar di bawah ini menunjukkan sebuah kerucut dengan jari-jari alas 10 cm dan tinggi 24 cm. Buatlah kerucut seperti gambar di bawah ini dengan kertas manila!

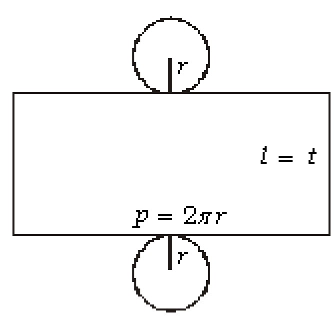


2.2 Luas Sisi dan Volume Bangun Ruang Sisi Lengkung

Pada subbab ini, kita akan membahas luas sisi dari bangun ruang sisi lengkung, yaitu tabung, kerucut, dan bola.

2.2.1 Luas sisi tabung

Perhatikan gambar 2.9!



Gambar 2.9
Jaring-jaring tabung

Gambar 2.9 merupakan jaring-jaring tabung dengan jari-jari alas r dan tinggi t. Perhatikan bahwa luas selimut tabung = luas persegi panjang dengan panjang $p = 2\pi r$ dan lebar $l = t$.

Jadi, luas selimut tabung dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\boxed{L_s = 2\pi rt}$$

di mana:

L_s = luas selimut tabung $\quad$ t = tinggi tabung

r = jari-jari alas/atap $\quad$ $\pi = \frac{22}{7}$ atau $\pi = 3{,}14$

Bola

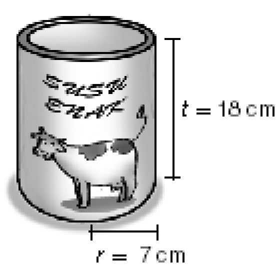
Kaleng cat

Pembatas jalan

Gambar 2.10

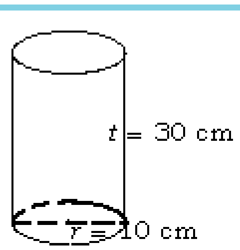
Contoh bangun ruang berbentuk bola, tabung, dan kerucut yang dapat kita jumpai di sekitar kita

Sumber: Dokumen penerbit



Gambar 2.11 (a)

Kaleng tempat susu yang berbentuk tabung



Gambar 2.11 (b)

Tabung dengan jari-jari 10 cm dan tinggi 30 cm

Untuk tabung terbuka (tanpa tutup), luas sisi tabung terbuka dirumuskan sebagai berikut:

$$\boxed{L \;=\; \text{luas selimut} + \text{luas lingkaran}}$$

atau

$$\boxed{L_{\text{Buka}} = 2\pi rt + \pi r^2 = \pi r(2t + r)}$$

di mana:

L_{Buka} = luas sisi tabung terbuka $\quad$ t = tinggi tabung

r = jari-jari alas/atap $\quad$ $\pi = \dfrac{22}{7}$ atau $\pi = 3{,}14$

Untuk tabung tertutup, luas sisi tabung tertutup dirumuskan sebagai berikut:

$$\boxed{L_{\text{Tutup}} = \text{luas selimut} + 2 \times \text{luas lingkaran}}$$ *atau*

$$\boxed{L_{\text{Tutup}} = 2\pi rt + 2\pi r^2 = 2\pi r(t + r)}$$

di mana:

L_{Tutup} = luas sisi tabung tertutup $\quad$ t = tinggi tabung

r = jari-jari alas/atap $\quad$ $\pi = \dfrac{22}{7}$ atau $\pi = 3{,}14$

Contoh soal 1:

Jari-jari alas sebuah kaleng tempat susu adalah 7 cm dan tingginya 18 cm. Hitunglah luas selimut kaleng tempat susu tersebut!

Jawab:

Diketahui: r = 7 cm, t = 18 cm

$$L_s = 2\pi rt = 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 18 = 792$$

Jadi, luas selimut adalah 792 cm^2.

Contoh soal 2:

Sebuah tabung tertutup, jari-jari alasnya 10 cm dan tingginya 30 cm. Hitunglah luas sisi tabung!

Jawab:

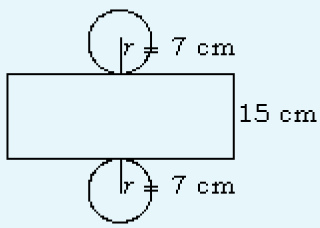
Diketahui: r = 10 cm, t = 30 cm

$$\begin{aligned} L &= 2\pi r(r + t) \\ &= 2 \times 3{,}14 \times 10 \times (10 + 30) \\ &= 2 \times 3{,}14 \times 10 \times 40 = 2.512 \end{aligned}$$

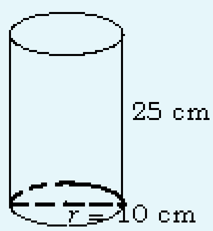
Jadi, luas tabung adalah 2.512 cm^2.

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

1. Gambar di bawah ini menunjukkan jaring-jaring tabung dengan jari-jari alas 7 cm dan tinggi 15 cm. Hitunglah luas selimut tabung tersebut!



2. Hitunglah luas selimut tabung, jika diketahui:
   a. jari-jari alasnya 2 dm dan tingginya 4 dm;
   b. jari-jari alasnya 1,4 dm dan tingginya 28 dm!
3. Gambar berikut ini menunjukkan tabung terbuka dengan jari-jari alas 10 cm dan tinggi 25 cm. Hitunglah luas sisi tabung tersebut!



4. Hitunglah luas sisi tabung terbuka, jika diketahui:
   a. jari-jari alasnya 14 cm dan tingginya 21 cm;
   b. diameter alasnya 35 cm dan tingginya 28 cm!
5. Diketahui sebuah tempat minyak berbentuk tabung. Jika diameter alasnya 0,5 m dan tingginya 1,2 m maka hitunglah luas sisi tempat minyak itu jika tempat minyak itu tertutup!
6. Hitunglah luas sisi tabung tertutup, jika:
   a. radius alasnya 10 cm dan tingginya 35 cm;
   b. garis tengah alasnya 25 cm dan tingginya 40 cm!
7. Misalkan kita telah membuat tabung dari karton.
   a. Jika jari-jari alasnya 3,5 cm maka berapa kelilingnya?
   b. Jika tinggi tabung 15 cm, berapa panjang dan lebar persegi panjang dari jaring-jaring tabung tersebut?
   c. Hitunglah luas selimut tabung!
   d. Hitunglah luas sisi tabung tanpa tutup!
   e. Hitunglah luas sisi tabung tertutup!

2.2.2 Luas sisi kerucut

Jika kerucut pada gambar 2.12(a) diiris sepanjang TA dan dibuka maka akan diperoleh jaring-jaring kerucut seperti tampak pada gambar 2.12(b). Jaring-jaring tersebut terdiri dari juring (sektor) lingkaran dengan titik pusat T dan jari-jari s. Sektor lingkaran tersebut berasal dari sisi lengkung kerucut yang disebut *selimut kerucut*.

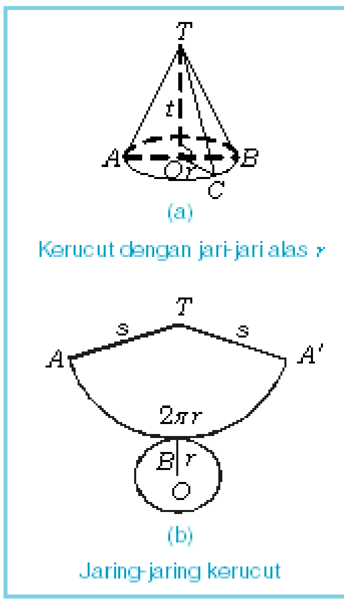
Berdasarkan gambar 2.12(b), luas selimut kerucut dapat ditentukan sebagai berikut.

$$\frac{\text{Luas juring } TABA'}{\text{Luas lingkaran berpusat di } T} = \frac{\text{Panjang busur } ABA'}{\text{Keliling lingkaran berpusat di } T}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{Luas juring } TABA'}{\pi s^2} = \frac{2\pi r}{2\pi s} = \frac{r}{s}$$

$$\Leftrightarrow \text{Luas juring } TABA' = \frac{r}{s} \times \pi s^2 = \pi r s$$

Jadi, luas selimut kerucut dapat dirumuskan:



Gambar 2.12
Kerucut dan jaring-jaringnya

$$\boxed{L_s = \pi rs}$$

di mana:

L_s = luas selimut kerucut r = jari-jari alas

s = garis pelukis kerucut $\pi = \frac{22}{7}$ atau $\pi = 3{,}14$

Hubungan kerucut dengan segitiga

Kerucut adalah suatu bangun ruang. Ternyata, kerucut dapat dibentuk dari sebuah segitiga siku-siku yang diputar 360°, di mana sisi siku-sikunya sebagai pusat putaran. Perhatikan gambar di bawah ini!

Sedangkan, luas seluruh sisi kerucut ditentukan sebagai berikut:

L = luas selimut kerucut + luas alas kerucut

$= \pi rs + \pi r^2$

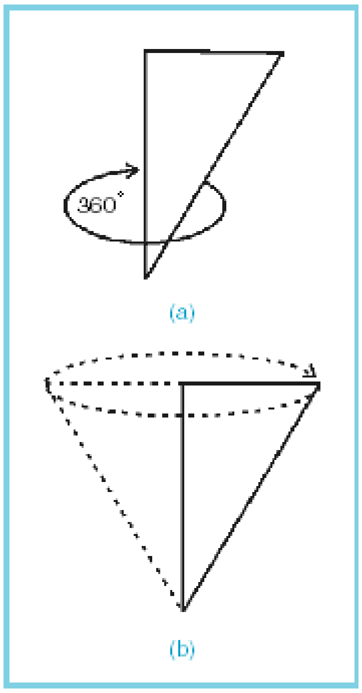
$= \pi r(s + r)$

Jadi, luas seluruh sisi kerucut (L) adalah:

$$\boxed{L = \pi r(s + r)}$$

di mana:

r = jari-jari alas; s = garis pelukis kerucut; dan $\pi = \frac{22}{7} = 3{,}14$



Gambar 2.13
Kerucut yang dibentuk dari segitiga siku-siku

Contoh soal 3:

Alas sebuah kerucut berjari-jari 10 cm dan panjang garis pelukisnya 15 cm. Hitunglah:

a. luas selimut kerucut; b. luas sisi kerucut!

Jawab:

Diketahui: r = 10 cm; s = 15 cm.

Ditanyakan: L_s dan L?

a. $L_s = \pi rs = 3{,}14 \times 10 \times 15 = 471$

Jadi, luas selimut kerucut adalah 471 cm^2.

b. $L = \pi r(s + r) = 3{,}14 \times 10 \times (15 + 10) = 3{,}14 \times 10 \times 25$

$= 785$

Jadi, luas sisi kerucut adalah 785 cm^2.

Contoh soal 4:

Diketahui jari-jari alas kerucut 10 cm dan tingginya 24 cm. Hitunglah luas sisi kerucut!

Jawab:

Diketahui: r = 10 cm, t = 24 cm

Panjang garis pelukis:

$$s = \sqrt{24^2 + 10^2} \times 1 \text{ cm}$$

$$= \sqrt{576 + 100} \text{ cm} = \sqrt{676} \text{ cm} = 26 \text{ cm}$$

Luas sisi kerucut: $L = \pi r(s + r)$

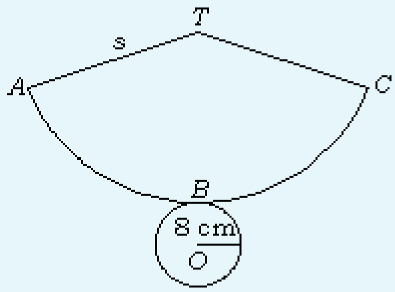
$= 3{,}14 \times 10 \times (26 + 10)$

$= 3{,}14 \times 10 \times 36 = 1.130{,}4$

Jadi, luas sisi kerucut adalah $1.130{,}4 \text{ cm}^2$.

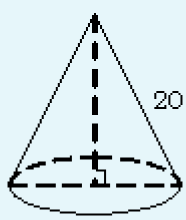
Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

1. Gambar di bawah ini menunjukkan jaring-jaring kerucut dengan jari-jari alas 8 cm dan tingginya 15 cm.



   a. Hitunglah panjang garis pelukis (s)!
   b. Hitunglah luas selimut kerucut!
   c. Hitunglah luas sisi kerucut!

2. Gambar berikut ini menunjukkan kerucut dengan panjang garis pelukis 20 cm dan keliling alasnya 88 cm.



   Hitunglah:
   a. jari-jari alasnya;
   b. tingginya;
   c. luas selimut kerucut;
   d. luas sisi kerucut!

3. Berapa luas kertas yang dibutuhkan untuk membuat kerucut yang diameter alasnya 60 cm dan tingginya 40 cm?
4. Keliling alas kerucut 66 cm dan tingginya 17 cm. Hitunglah luas sisi kerucut!
5. Jari-jari alas sebuah kerucut 3,5 cm dan panjang garis pelukisnya 25 cm. Hitunglah luas sisi kerucut!
6. Luas selimut kerucut 759 cm^2 dan jari-jari alasnya 10,5 cm. Hitunglah panjang garis pelukisnya!
7. Sebuah segitiga siku-siku diputar pada salah satu sisi siku-sikunya sehingga terbentuk kerucut. Jika panjang sisi siku-siku segitiga 10 cm dan 4 cm, hitunglah luas selimut kerucut yang terbentuk (2 jawaban)!
8. Luas selimut kerucut 660 cm^2 dan panjang garis pelukisnya 15 cm. Hitunglah panjang jari-jari alasnya!

2.2.3 Luas sisi bola

Perhatikan gambar 2.14! Gambar 2.14(a) menunjukkan belahan bola karet dengan jari-jari r. Gambar 2.14(b) menunjukkan belahan bola karet dari gambar 2.14(a) yang telah dililiti benang pada seluruh sisinya. Kemudian, lilitan benang dibuka dan diambil setengah dari panjangnya untuk kemudian dibentuk lingkaran (seperti obat nyamuk bakar) yang ditunjukkan gambar 2.14(c).

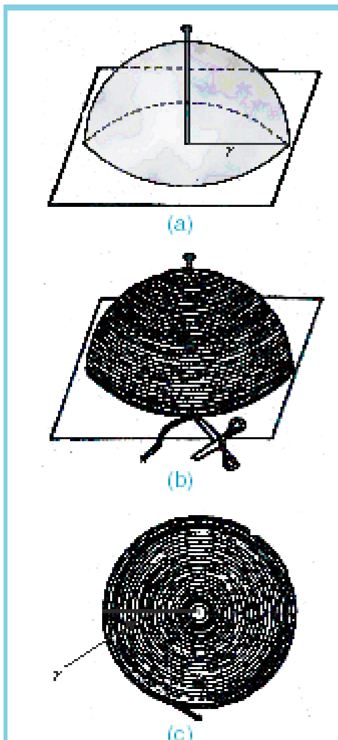
Perhatikan bahwa luas lingkaran gambar 2.14(c) sama dengan luas seperempat sisi bola dengan jari-jari r! Jika percobaan ini dilakukan dengan cermat, jari-jari lingkaran gambar 2.14(c) = jari-jari bola = r. Luas lingkaran gambar 2.14(c) = πr^2. Di sisi lain, luas lingkaran gambar 2.14(c) = $\frac{1}{4}$ × luas sisi bola. Jadi, luas sisi bola dengan jari-jari r adalah:

$$\boxed{L = 4\pi r^2}$$

di mana:

L = luas sisi bola $\pi = \frac{22}{7}$ atau $\pi = 3{,}14$

r = jari-jari bola



Gambar 2.14
Belahan bola yang dililiti benang

Contoh soal 5:

Jari-jari sebuah bola 3,5 cm. Hitunglah luas sisi bola itu!

Jawab:

Diketahui: r = 3,5 cm.

$$L = 4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 3{,}5^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 12{,}25$$

$$= 154$$

Jadi, luas sisi bola itu adalah 154 cm^2.

Contoh soal 6:

Luas sisi bola adalah 314 cm^2. Hitunglah jari-jari bola!

Jawab:

Diketahui: L = 314 cm^2.

$$L = 4\pi r^2$$

$$\Leftrightarrow 314 = 4 \times 3{,}14 r^2$$

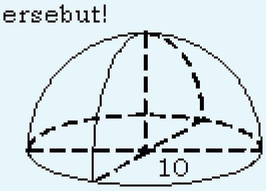
$$\Leftrightarrow r^2 = \frac{314}{4 \times 3{,}14} = 25 \Leftrightarrow r = 5$$

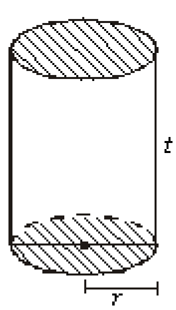
Jadi, jari-jari bola itu adalah 5 cm.

LATIHAN 4

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

1. Hitunglah luas sisi bola yang berjari-jari:
   a. 4 cm; b. 10 cm;
   c. 14 cm; d. 0,7 cm!
2. Diketahui luas sisi sebuah bola adalah 2.464 cm^2. Hitunglah jari-jari bola!
3. Hitunglah luas sisi setengah bola dengan jari-jari 5 cm!
4. Berapa luas sisi bola terbesar yang dapat dimasukkan ke dalam kubus yang rusuknya 10 cm?
5. Gambar di bawah ini adalah belahan bola dengan bagian alas tertutup. Jika jari-jari alasnya 10 cm, hitunglah luas sisi bangun tersebut!





Gambar 2.15

Tabung yaitu prisma dengan sisi alas berbentuk lingkaran

2.2.4 Volume tabung

Tabung merupakan prisma dengan sisi alas berbentuk lingkaran, seperti tampak pada gambar 2.15!

Volume tabung dapat dinyatakan dengan:

$$\boxed{V = \text{luas alas} \times \text{tinggi} = L \cdot t}$$

Karena alas tabung berbentuk lingkaran, maka:

$$\boxed{V = \pi r^2 t} \quad \text{atau} \quad \boxed{V = \frac{1}{4}\pi d^2 t}$$

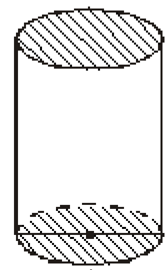
di mana:

V = volume r = jari-jari lingkaran

t = tinggi d = diameter

$\pi = \frac{22}{7}$ atau $\pi = 3{,}14$

Contoh soal 7:



Jari-jari alas sebuah tabung 5 cm dan tingginya 20 cm. Hitunglah volume tabung tersebut!

Jawab:

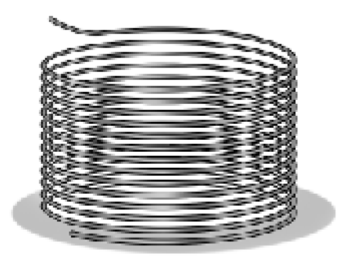
Diketahui: r = 5 cm dan t = 20 cm

$$V = \pi r^2 t$$
$$= 3{,}14 \times 5^2 \times 20$$
$$= 3{,}14 \times 25 \times 20 = 1.570$$

Jadi, volume tabung adalah 1.570 cm^3.

Contoh soal 8:

Hitunglah berat kawat yang panjangnya 1 km dan penampangnya berbentuk lingkaran dengan diameter 5 cm, jika diketahui bahwa 1 cm^3 kawat beratnya 7,5 gram!



Jawab:

Panjang kawat = 1 km

= 100.000 cm (merupakan tinggi tabung)

$$V = \frac{1}{4}\pi d^2 t$$
$$= \frac{1}{4} \times 3{,}14 \times 5^2 \times 100.000$$
$$= \frac{1}{4} \times 3{,}14 \times 25 \times 100.000 = 1.962.500$$

Berat jenis $= \dfrac{\text{berat}}{\text{volume}}$

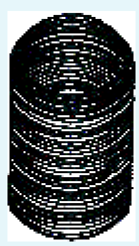
$\Leftrightarrow$ berat = volume × berat jenis

$\Leftrightarrow$ berat = 1.962.500 × 7,5 = 14.718.750

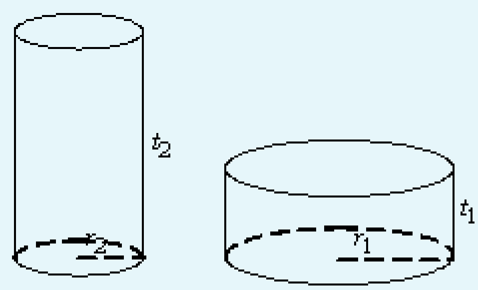
Jadi, berat kawat tersebut 14.718.750 gram.

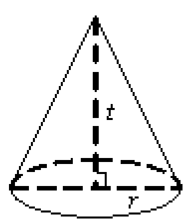
Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

1. Hitunglah volume tabung berikut!
   a. Jari-jari alas 10 cm dan tingginya 25 cm.
   b. Garis tengah alas 50 cm dan tingginya 30 cm.
2. Diketahui volume sebuah tabung 11.000 cm^3 dan luas alasnya 55 cm^2. Hitunglah tinggi tabung!
3. Diketahui volume sebuah tabung 48.510 cm^3. Bila tinggi tabung 35 cm, hitunglah diameter alas tabung!
4. Berapa liter bensin dapat dimasukkan ke dalam tangki yang berbentuk tabung dengan diameter 2,5 m dan panjang 3,5 m?
5. Diketahui volume sebuah tabung 7.850 cm^3. Bila diameter alasnya 20 cm, hitunglah tingginya!
6. Gambar di samping ini menunjukkan gulungan kawat yang panjangnya 250 m. Jika diameter penampangnya 5 mm dan 1 cm^3 kawat beratnya 8,5 gram, hitunglah berat gulungan kawat itu!



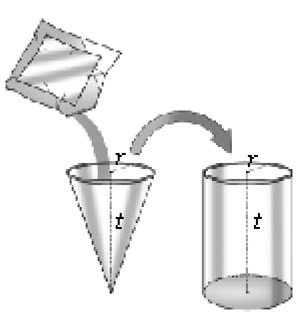
7. Sebuah tabung panjangnya 1,4 meter dan volumenya 484.000 liter. Hitunglah jari-jari alas tabung!
8. Jika diketahui 1 cm^3 kawat beratnya 7,5 gram, hitunglah berat kawat yang panjangnya 1 km dan jari-jari penampangnya 1,4 mm!
9. Sebuah drum minyak tanah berbentuk tabung dengan diameter alas 80 cm dan tinggi 1,2 m. Drum berisi penuh minyak tanah. Jika minyak tanah dipindahkan ke dalam kaleng-kaleng berbentuk tabung dengan diameter 16 cm dan tinggi 15 cm, berapa kaleng yang diperlukan?
10. Gambar di bawah ini menunjukkan dua tabung yang volumenya sama. Jika perbandingan jari-jari $r_1 : r_2 = 2 : 1$, berapa perbandingan tinggi $t_1 : t_2$?





Gambar 2.16

Kerucut dengan jari-jari alas r



(a) (b)

Gambar 2.17

Kerucut diisi dengan gula pasir

2.2.5 Volume kerucut

Kerucut merupakan limas dengan alas berbentuk lingkaran. Gambar kerucut ditunjukkan pada gambar 2.16!

Untuk menentukan volume kerucut, marilah kita memperhatikan penjelasan berikut.

Perhatikan gambar 2.17, gambar 2.17(a) menunjukkan kerucut terbuka dengan jari-jari alas r dan tinggi t. Jika kerucut tersebut diisi gula pasir hingga penuh dan selanjutnya gula pasir dalam kerucut dipindahkan ke dalam tabung (gambar 2.17(b)), apakah yang akan terjadi? Ternyata, tabung tepat terisi penuh dengan 3 kali pengisian.

Jadi, 3 × volume kerucut = volume tabung. Dengan kata lain, volume kerucut = $\frac{1}{3}$ volume tabung. Dapat juga ditulis dengan:

$$\boxed{V_k = \frac{1}{3}V_{tabung}} \quad \text{atau} \quad \boxed{V_k = \frac{1}{3}\pi r^2 t}$$

di mana:

V_k = volume kerucut $\qquad$ r = jari-jari alas

t = tinggi $\quad \pi = \frac{22}{7}$ atau $\pi = 3{,}14$

Menghitung volume kerucut

Volume disebut juga dengan isi. Volume sebuah kerucut adalah

$\frac{1}{3} \times$ luas alas $\times$ tinggi kerucut.

Karena alas sebuah kerucut berbentuk lingkaran, maka luas alas kerucut dirumuskan dengan πr^2.

Oleh karena itu, volume kerucut sama dengan

$\frac{1}{3} \times \pi r^2 \times t$.

Contoh soal 9:

Jari-jari alas sebuah kerucut 10 cm dan tingginya 24 cm. Hitunglah volumenya!

Jawab:

Diketahui r = 10 cm dan t = 24 cm

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 t = \frac{1}{3} \times 3{,}14 \times 10^2 \times 24 = 2.512$$

Jadi, volume kerucut adalah 2.512 cm^3.

Contoh soal 10:

Volume sebuah kerucut 616 cm^3 dan tingginya 12 cm. Hitunglah jari-jari kerucut!

Jawab:

Diketahui V = 616 cm^3 dan t = 12 cm

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 t$$

$$\Leftrightarrow 616 = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times r^2 \times 12 = \frac{88}{7} r^2$$

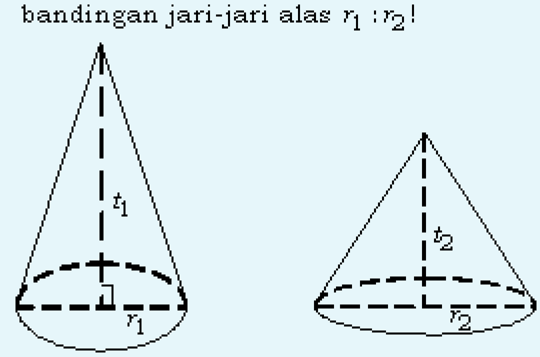
$$\Leftrightarrow r^2 = 616 \times \frac{7}{88} = 49 \Leftrightarrow r = 7$$

Jadi, jari-jari alas kerucut adalah 7 cm.

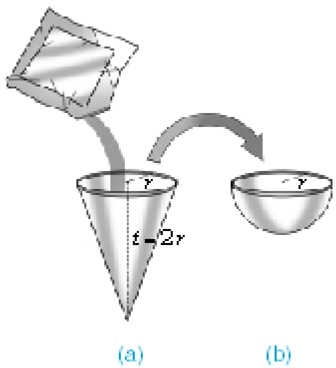
LATIHAN 6

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

1. Diketahui sebuah kerucut dengan diameter alasnya 20 cm dan tingginya 27 cm. Hitunglah volumenya!
2. Radius alas kerucut adalah 35 cm dan tingginya 63 cm. Hitunglah volumenya!
3. Hitunglah volume kerucut yang jari-jari alasnya 24,5 cm dan tingginya 61,2 cm!
4. Diketahui volume sebuah kerucut 1.078 cm^3 dan jari-jari alasnya 7 cm. Hitunglah tingginya!
5. Tentukan kedalaman sebuah wadah berbentuk kerucut yang dapat diisi penuh dengan 0,2 liter zat cair, bila diameter alasnya 12 cm!
6. Sebuah kerucut dibentuk dari selembar seng yang berbentuk setengah lingkaran dengan diameter 7 meter. Tentukan jari-jari, tinggi kerucut, serta isinya!
7. Perbandingan jari-jari alas dan tinggi kerucut adalah 7 : 12. Jika volume kerucut 77 cm^3, hitunglah panjang jari-jari alas dan tingginya!
8. Gambar di bawah menunjukkan dua kerucut yang memiliki volume sama. Jika tinggi $t_1 : t_2 = 9 : 4$, carilah perbandingan jari-jari alas $r_1 : r_2$!



2.2.6 Volume bola



Gambar 2.18

Kerucut diisi gula pasir sampai penuh

Perhatikan gambar 2.18! Gambar 2.18(a) menunjukkan kerucut terbuka dengan jari-jari alas r dan tinggi $t = 2r$. Kerucut tersebut diisi gula pasir hingga penuh. Selanjutnya, gula pasir dalam kerucut tersebut dipindahkan ke dalam belahan bola (gambar 2.18(b)). Jika percobaan di atas dilakukan dengan cermat, belahan bola dengan jari-jari r pada gambar 2.18(b) terisi penuh oleh gula pasir yang berasal dari kerucut pada gambar 2.18(a).

Diketahui volume kerucut adalah $V = \frac{1}{3}\pi r^2 t$

Karena $t = 2r$, maka $V = \frac{1}{3}\pi r^2 (2r) = \frac{2}{3}\pi r^3$

Ini berarti, volume belahan bola $V = \frac{2}{3}\pi r^3$.

Kesimpulannya, volume sebuah bola dengan jari-jari r dapat dirumuskan:

$$\boxed{V = 2 \times \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

Hubungan bola dengan lingkaran

Bola merupakan bangun ruang. Seringkali bola disebut juga sebagai bangun ruang tiga dimensi. Bola dapat dibentuk dari bangun setengah lingkaran yang diputar sejauh 360° pada garis tengahnya.

Contoh soal 11:

Tentukan volume bola yang jari-jarinya 6 cm!

Jawab:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times 3{,}14 \times 6^3 = 904{,}32$$

Jadi, volume bola adalah $904{,}32 \text{ cm}^3$.

Contoh soal 12:

Diketahui volume sebuah bola 113.040 cm^3. Tentukan jari-jari bola!

Jawab:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\Leftrightarrow 113.040 = \frac{4}{3} \times 3{,}14 \times r^3 = \frac{12{,}56}{3} r^3$$

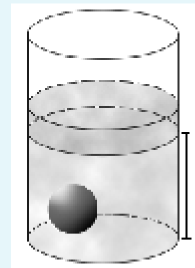
$$\Leftrightarrow r^3 = 113.040 \times \frac{3}{12{,}56} = 27.000$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt[3]{27.000} = 30$$

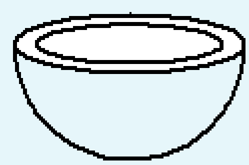
Jadi, jari-jari bola adalah 30 cm.

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

1. Hitunglah volume bola yang berjari-jari berikut!
   a. 4 cm   b. 5 cm
   c. 10 cm   d. 21 cm
2. Hitunglah jari-jari bola bila diketahui volumenya sebagai berikut!
   a. $38{,}808 \text{ cm}^3$ ($\pi = \frac{22}{7}$)
   b. $904{,}32 \text{ cm}^3$ ($\pi = 3{,}14$)
3. Berapa volume bola terbesar yang dapat dimasukkan ke dalam kubus dengan rusuk 6 cm?
4. Diameter bagian luar sebuah bola 21 cm. Jika tebal kulit bola 3,5 mm, hitunglah volume kulit bola!
5. Hitunglah berat 500 buah bola besi, bila panjang masing-masing diameternya 0,7 cm dan 1 cm^3 besi beratnya 7,5 kg!
6. Gambar berikut ini menunjukkan sebuah tabung berisi air yang dimasuki sebuah bola. Jika jari-jari alas tabung 14 cm, jari-jari bola 7 cm, dan tinggi permukaan air sebelum dimasuki bola 14 cm, hitunglah tinggi permukaan air setelah bola dimasukkan ke dalam air!

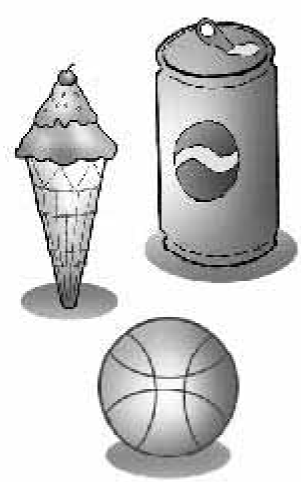


7. Dalam suatu pameran, atap salah satu paviliun berbentuk belahan bola dengan diameter 35 m. Tentukan volume udara yang mengisi atap paviliun!
8. Jari-jari tiga buah bola berturut-turut 2 cm, 3 cm, dan 4 cm. Tanpa menghitung volume masing-masing bola, tentukan perbandingan volume ketiga bola!
9. Sebuah belahan bola terbuat dari karet, seperti ditunjukkan pada gambar. Jika diameter bagian luarnya 20 cm, dan tebal kulit bola itu 0,5 cm, hitunglah jumlah luas seluruh sisinya!



2.3 Penyelesaian Masalah Bangun Ruang Sisi Lengkung

Dalam kehidupan sehari-hari, kita sering menjumpai bangun ruang yang berbentuk tabung/silinder, kerucut, ataupun bola. Dengan menguasai konsep yang berkaitan dengan tabung, kerucut, dan bola kita dapat memanfaatkannya untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari.



Contoh soal 13:

Suatu kaleng berbentuk kubus dengan rusuk 50 cm, penuh berisi minyak angin. Minyak angin itu dituangkan ke dalam kaleng-kaleng kecil berbentuk silinder dengan diameter 10 cm dan tingginya 7 cm. Berapa kaleng kecil yang diperlukan untuk menampung minyak angin tersebut?

Jawab:

$$\text{Kaleng yang dibutuhkan} = \frac{V_{\text{kubus}}}{V_{\text{silinder}}}$$

$$= \frac{s \times s \times s}{\pi r^2 t}$$

$$= \frac{\cancel{50}^{2}\ \cancel{cm} \times 50\ \cancel{cm} \times 50\ \cancel{cm}}{\frac{22}{\cancel{7}} \times \cancel{5}\ \cancel{cm} \times \cancel{5}\ \cancel{cm} \times \cancel{7}\ \cancel{cm}}$$

$$= \frac{5000}{22}$$

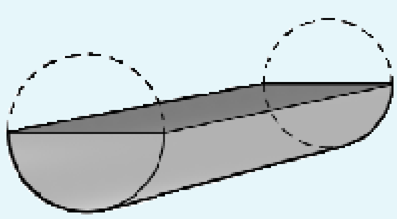
$$= 227,27 \approx 228$$

Jadi, untuk menampung minyak angin tersebut diperlukan 228 kaleng kecil.

LATIHAN 8

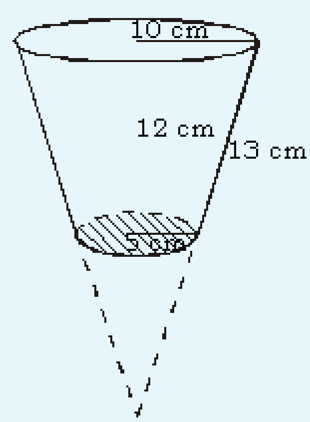
Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

1. Sebuah pipa besi dengan garis tengahnya 7 cm. Jika panjangnya 5 m, berapa literkah air yang ada pada pipa besi itu jika terisi setengahnya?
2. Diketahui sebuah kawat yang panjangnya 250 m dan diameter kawat 20 mm. Berat kawat 1 cm^3 = 9,8 gram. $(\pi = 3,14)$
   a. Hitunglah berat kawat tersebut!
   b. Jika harga 1 kg kawat Rp 3.200,00, berapa harga kawat itu seluruhnya?
3. Sebuah silinder besi padat dibelah menjadi dua bagian. Jika tinggi silinder 20 cm dan luas selimutnya 1.256 cm^2 dan $\pi = 3,14$. Tentukan luas permukaan belahan silinder tersebut!

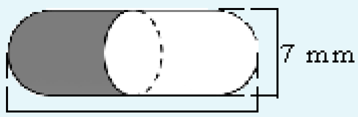


4. Seseorang menguras bak penampung air berbentuk tabung dengan diameter 98 cm dan tinggi 150 cm. Apabila bak tersebut terisi penuh dan kran dibuka sehingga debit air keluar 300 cm^3/ detik, berapa lama bak tersebut dapat dikuras sampai kosong?
5. Sebuah bandul terbuat dari timah berbentuk kerucut dengan jari-jari alas 7 cm dan tingginya 12 cm. Jika berat 1 cm^3 timah adalah 8 gram, berapa gramkah berat bandul tersebut?
6. Sebuah cup es krim berbentuk kerucut terbuat dari karton. Diameter kerucut 7 cm dan tingginya 12 cm. Tentukanlah:
   a. Volume cup es krim!
   b. Luas karton yang diperlukan!

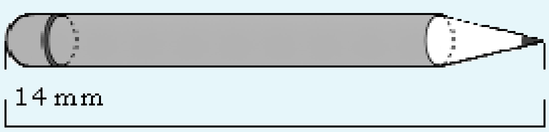
7. Kemasan tablet K-Redoxon berbentuk tabung yang tingginya 10 cm dan jari-jarinya 1,4 cm. Setiap kemasan berisi 10 tablet. Berapa rata-rata volume sebuah tablet?
8. Sebuah ember berbentuk seperti pada gambar di bawah ini dengan tinggi 12 cm, jari-jari lingkaran alas 5 cm, dan jari-jari lingkaran atas 10 cm. Tentukan volume dan luas permukaan ember tersebut!



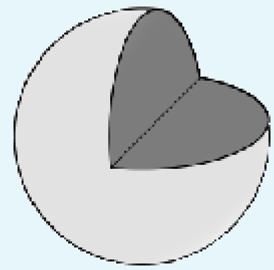
9. Hitunglah berat 150 kelereng yang masing-masing berdiameter 0,7 cm, jika berat 1 cm^3 logam kelereng 7,8 gram!
10. Sebuah mangkok berbentuk setengah bola. Jika mangkok itu dapat memuat 1526,04 cm^3. Hitunglah diameter mangkok tersebut! $(\pi = 3{,}14)$
11. Sebuah kapsul berbentuk seperti gambar di bawah ini. Tentukan volume kapsul tersebut!



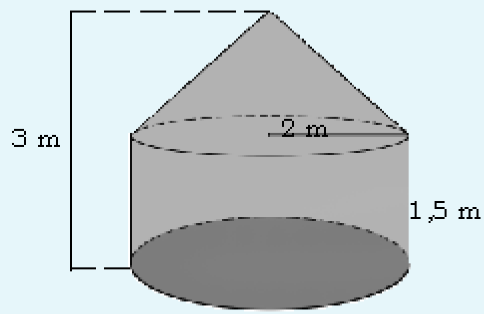
12. Sebuah atap paviliun berbentuk setengah bola berdiameter 14 m. Jika atap paviliun tersebut dicat dan 1 m^2 membutuhkan biaya Rp 90.000,00. Berapa biaya yang diperlukan untuk mengecat atap paviliun tersebut!
13. Sebuah pensil berbentuk gabungan kerucut, tabung, dan setengah bola. Jika diameter pensil 14 mm, tinggi kerucut 24 mm, dan panjang seluruh pensil 18,1 cm. Tentukan volume pensil tersebut!



14. Sebuah semangka berbentuk bola dipotong $\frac{1}{4}$ bagian. Jika diameter semangka itu 28 cm. Tentukan volume semangka yang tersisa dan luas permukaannya!



15. Untuk membantu korban gempa DIY, akan dibuat tenda darurat sebanyak 3000 tenda dari plastik dengan ukuran seperti pada gambar di bawah ini. Tentukan berapa luas plastik yang diperlukan untuk membuat sejumlah tenda tersebut!



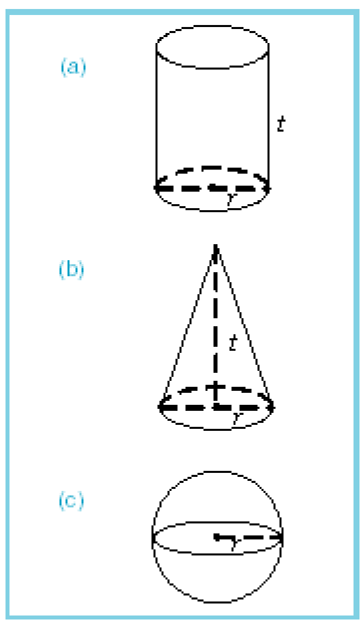
2.4 Perbandingan Volume Tabung, Kerucut, dan Bola (Pengayaan)

Pada subbab ini, kita akan mempelajari perbandingan volume tabung, kerucut, dan bola dengan jari-jari alas tabung yang sama dengan jari-jari alas kerucut dan bola serta perbandingan dan perubahan volume tabung, kerucut, dan bola karena adanya perubahan ukuran jari-jari.

2.4.1 Perbandingan V_t, V_k, V_b dengan jari-jari alas tabung sama dengan jari-jari alas kerucut dan bola

Perhatikan gambar 2.19! Gambar 2.19(a) menunjukkan tabung dengan jari-jari alas r. Gambar 2.19(b) menunjukkan kerucut dengan jari-jari alas r, dan gambar 2.19(c) menunjukkan bola dengan jari-jari r.

Jika tinggi tabung = tinggi kerucut = $t = cr$, (c suatu konstanta) dan jari-jari alas tabung = jari-jari alas kerucut = jari-jari bola = r, maka perbandingan volume tabung (V_t), volume kerucut



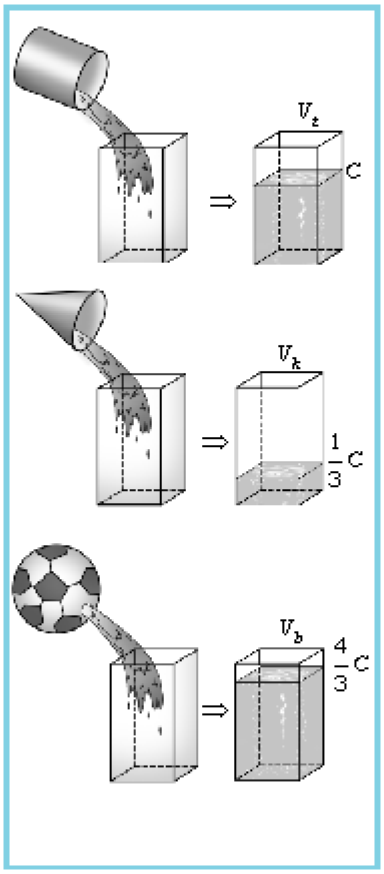
Gambar 2.19
Tabung, kerucut, dan bola

(V_k) dan volume bola (V_b) adalah:

$$V_t : V_k : V_b = \pi r^2 t : \frac{1}{3}\pi r^2 t : \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \pi r^2 (cr) : \frac{1}{3}\pi r^2 (cr) : \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= c : \frac{1}{3}c : \frac{4}{3}$$



Jadi, $\boxed{V_t : V_k : V_b = c : \frac{1}{3}c : \frac{4}{3}, c \text{ suatu konstanta}}$

Perbandingan tersebut berlaku untuk tabung, kerucut, dan bola yang berjari-jari r dan tinggi tabung, serta tinggi kerucut = cr.

Contoh soal 13:

Tentukan perbandingan volume tabung, kerucut, dan bola, di mana tinggi tabung = tinggi kerucut = 6 cm dan jari-jari alas tabung = jari-jari alas kerucut = jari-jari alas bola = 2 cm!

Jawab:

Diketahui: t = 6 cm; r = 2 cm.

Ditanyakan: $V_t : V_k : V_b$

Penyelesaian: $t = cr \Leftrightarrow c = \frac{t}{r} = \frac{6 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = 3$ cm.

Jadi, $V_t : V_k : V_b = 3 : \frac{3}{3} : \frac{4}{3} = 3 : 1 : \frac{4}{3}$

Diskusi

Salin dan lengkapilah tabel berikut! Kerjakanlah dengan temanmu dalam satu kelompok.

No	Tabung (t)		Kerucut (k)		Bola (b)		V_t	V_k	V_b	$V_t : V_k : V_b$
	r	t	r	t	r	t				
1	3 cm	6 cm	3 cm	6 cm	3 cm	6 cm				
2	4 cm	8 cm	4 cm	8 cm	4 cm	8 cm				
3	5 cm	10 cm	5 cm	10 cm	5 cm	10 cm				
4	6 cm	12 cm	6 cm	12 cm	6 cm	12 cm				
5	7 cm	14 cm	7 cm	14 cm	7 cm	14 cm				

Apakah pada kolom $V_t : V_k : V_b$, jawaban soal nomor 1 sampai dengan 5 di atas sama?

Apakah yang dapat disimpulkan dari jawaban soal nomor 1 sampai dengan 5 di atas?

2.4.2 Perbandingan dan perubahan volume tabung, kerucut, dan bola karena adanya perubahan ukuran jari-jari

A. Perbandingan dan perubahan volume tabung

Perhatikan gambar 2.20!

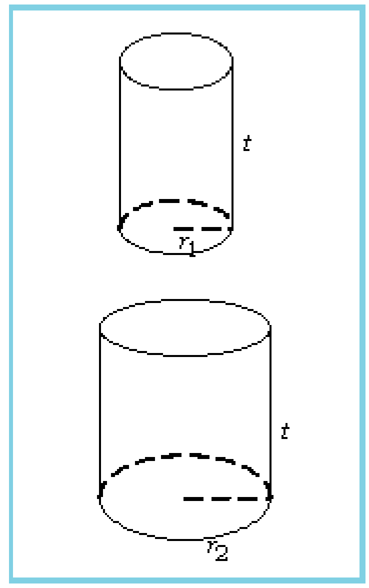
Gambar 2.20 menunjukkan dua tabung yang mempunyai tinggi (t) sama. Jika tabung I mempunyai jari-jari alas r_1 dan tabung II mempunyai jari-jari alas $r_2 = cr_1$, maka perbandingan volume tabung I (V_1) dan tabung II (V_2) adalah:

$$V_1 : V_2 = \pi r_1^2 t : \pi r_2^2 t$$

$$\Leftrightarrow V_1 : V_2 = \pi r_1^2 t : \pi (cr_1)^2 t$$

$$\Leftrightarrow V_1 : V_2 = \pi r_1^2 t : \pi c^2 r_1^2 t$$

$$\Leftrightarrow \boxed{V_1 : V_2 = 1 : c^2}$$



Gambar 2.20

Dua tabung yang mempunyai tinggi t sama

Dengan kata lain, besar perubahan volume tabung jika jari-jarinya berubah sebesar c kali jari-jari semula adalah sebesar c^2 kali volume tabung semula. Besar perubahan volume 2 tabung adalah $\Delta V = V_2 - V_1$

Contoh soal 14:

Tentukan perbandingan dan perubahan volume 2 tabung, di mana 2 tabung tersebut mempunyai tinggi yang sama, yaitu t = 3 cm, sedangkan jari-jari alas tabung I dan tabung II, masing-masing adalah 1 cm dan 2 cm!

Jawab:

Diketahui: t = 3 cm, r_1 = 1 cm, dan r_2 = 2 cm.

Ditanyakan: $V_1 : V_2$ dan ΔV

Penyelesaian:

$$r_2 = cr_1 \Leftrightarrow c = \frac{r_2}{r_1} \Leftrightarrow c = \frac{2}{1} = 2.$$

- Dicari perbandingan volume tabung I dan tabung II.

$$V_1 : V_2 = 1 : c^2$$
$$= 1 : (2)^2$$
$$= 1 : 4$$

Jadi, $V_1 : V_2 = 1 : 4$

- Dicari perubahan volume tabung I dan tabung II.

$$V_1 = \pi r_1^2 t$$
$$= \pi \times 1 \times 3 = 3\pi$$

KASUS KHUSUS

Jika jari-jari tabung = jari-jari bola = jari-jari kerucut = r dan tinggi tabung = tinggi bola = tinggi kerucut = $2r$, maka:

$$c = \frac{2r}{r} = 2 \text{ dan } V_t : V_k : V_b$$
$$= 2 : \frac{2}{3} : \frac{4}{3}$$
$$= 3 : 1 : 2$$

Oleh karena $V_2 = 4 \times V_1$, maka besar perubahan volume tabung I dan tabung II adalah:

$$\begin{aligned}\Delta V &= V_2 - V_1 \\ &= 4V_1 - V_1 \\ &= 3V_1 \\ &= 3 \times 3\pi = 9\pi\end{aligned}$$

Jadi, besar perubahan volume tabung I dan tabung II adalah 9π cm^3.

Diskusi

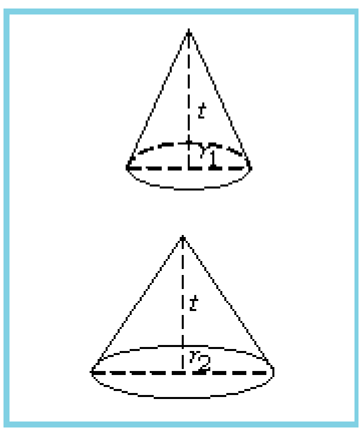
Salin dan lengkapilah tabel berikut! Kerjakanlah dengan temanmu dalam satu kelompok.

No	Tabung 1		Tabung 2		V_1	V_2	$V_1 : V_2$
	r_1	t_1	r_2	t_2			
1	2 cm	5 cm	3 cm	5 cm			
2	3 cm	6 cm	4 cm	6 cm			
3	4 cm	8 cm	5 cm	8 cm			
4	5 cm	10 cm	6 cm	10 cm			
5	6 cm	15 cm	7 cm	15 cm			

Apakah ada relasi antara perbandingan $r_1 : r_2$ dengan perbandingan $V_1 : V_2$ dari jawaban soal nomor 1 sampai dengan 5 di atas? Jika ada, berilah kesimpulan tentang relasi tersebut!

B. Perbandingan dan perubahan volume kerucut

Perhatikan gambar 2.21!



Gambar 2.21

Dua kerucut dengan tinggi t yang sama

Gambar 2.21 menunjukkan dua kerucut yang mempunyai tinggi (t) sama. Jika kerucut I mempunyai jari-jari alas r_1 dan kerucut II mempunyai jari-jari alas $r_2 = cr_1$, maka perbandingan volume kerucut I (V_1) dan kerucut II (V_2) adalah:

$$V_1 : V_2 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 t : \frac{1}{3}\pi r_2^2 t$$

$$\Leftrightarrow \quad V_1 : V_2 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 t : \frac{1}{3}\pi (cr_1)^2\, t$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{V_1 : V_2 = 1 : c^2}$$

Besar perubahan volume 2 kerucut adalah $\Delta V = V_2 - V_1$.

Contoh soal 15:

Dua buah kerucut mempunyai tinggi yang sama, yaitu t = 3 cm. Jari-jari kerucut I dan kerucut II, masing-masing 2 cm dan

3 cm. Tentukan perbandingan volume kerucut I dan kerucut II serta besar perubahan volumenya!

Jawab:

Diketahui: t = 3 cm, r_1 = 2 cm, dan r_2 = 3 cm

Ditanyakan: $V_1 : V_2$ dan ΔV

Penyelesaian:

$$r_2 = cr_1 \Leftrightarrow c = \frac{r_2}{r_1} \Leftrightarrow c = \frac{3}{2}$$

- Dicari perbandingan volume kerucut I dan kerucut II.

$$V_1 : V_2 = 1 : c^2 = 1 : \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 1 : \frac{9}{4}$$

Jadi, $V_1 : V_2 = 4 \text{ cm}^3 : 9 \text{ cm}^3$

- Dicari perubahan volume kerucut I dan kerucut II.

$$V_1 : V_2 = 4 : 9 \text{, maka } V_2 = \frac{9}{4}V_1$$

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 t = \frac{1}{3} \times \pi \times (2)^2 \times 3 = 4\pi$$

Oleh karena $V_2 = \frac{9}{4}V_1$, maka besar perubahan volume kerucut I dan kerucut II adalah:

$$\Delta V = V_2 - V_1 = \frac{9}{4}V_1 - V_1 = \frac{5}{4}V_1 = \frac{5}{4}(4\pi) = 5\pi$$

Jadi, besar perubahan volume kerucut I dan kerucut II adalah $5\pi \text{ cm}^3$.

INFO MATEMATIKA

Kerucut dibentuk dengan memegang 1 ujung sebuah tali yang tetap dan memutar tali itu mengikuti sebuah jalur berbentuk lingkaran. Jika ujung tali yang tetap dipegang tepat di atas pusat lingkaran, maka kerucut itu disebut *kerucut tegak lurus*. Bila puncak dari kerucut tidak berada tepat diatas titik pusat lingkaran, maka kerucut disebut *kerucut miring*. Tinggi kerucut adalah jarak tegak lurus dari puncak kerucut ke bidang dasar. Volumenya sama dengan sepertiga dari hasil kali luas bidang dasar dengan tingginya.

Jika sebuah kerucut kita bagi menjadi 2, yaitu dengan cara mengirisnya dengan sebuah bidang yang sejajar dengan bidang dasarnya, bagian bawah kerucut itu disebut *frustum* atau *kerucut terpancung*. Banyak bagian-bagian mesin berbentuk kerucut atau kerucut terpancung.

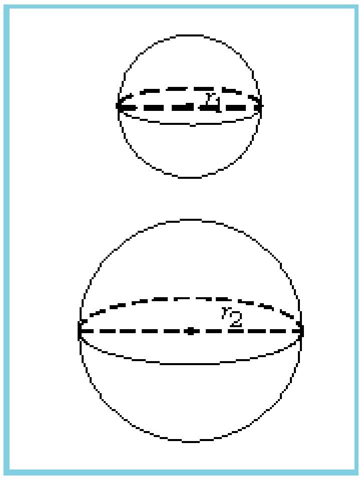
Sumber: Ilmu Pengetahuan Populer 2

Diskusi

Salin dan lengkapilah tabel berikut! Kerjakanlah dengan temanmu dalam satu kelompok.

No	Kerucut 1		Kerucut 2		V_1	V_2	$V_1 : V_2$
	r_1	t_1	r_2	t_2			
1	3 cm	6 cm	4 cm	6 cm			
2	4 cm	9 cm	5 cm	9 cm			
3	5 cm	12 cm	6 cm	12 cm			
4	6 cm	15 cm	8 cm	15 cm			
5	7 cm	18 cm	9 cm	18 cm			

Apakah ada relasi antara perbandingan $r_1 : r_2$ dengan $V_1 : V_2$ dari jawaban soal nomor 1 sampai dengan 5 di atas? Jika ada, berilah kesimpulan tentang relasi tersebut!



Gambar 2.22

Dua bola dengan jari-jari masing-masing r_1 dan r_2

C. Perbandingan dan perubahan volume bola

Perhatikan gambar 2.22!

Gambar 2.22 menunjukkan dua bola dengan jari-jari masing-masing r_1 dan r_2, di mana $r_2 = cr_1$. Sehingga perbandingan volume bola I dengan bola II adalah:

$$V_1 : V_2 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 : \frac{4}{3}\pi r_2^3$$

$$\Leftrightarrow V_1 : V_2 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 : \frac{4}{3}\pi (cr_1)^3$$

$$\Leftrightarrow \boxed{V_1 : V_2 = 1 : c^3}$$

Besar perubahan volume 2 bola adalah $\Delta V = V_2 - V_1$

Contoh soal 16:

Tentukan perbandingan dan besar perubahan volume dari dua buah bola dengan jari-jari masing-masing $r_1 = 1$ cm dan $r_2 = 2$ cm!

Jawab:

Diketahui: $r_1 = 1$ cm dan $r_2 = 2$ cm

Ditanyakan: $V_1 : V_2$ dan ΔV

Penyelesaian:

$$r_2 = cr_1 \Leftrightarrow c = \frac{r_2}{r_1} \Leftrightarrow c = 2$$

- Dicari perbandingan volume bola I dan bola II.

$$\begin{aligned} V_1 : V_2 &= 1 : c^3 \\ &= 1 : 2^3 \\ &= 1 : 8 \end{aligned}$$

Jadi, $V_1 : V_2 = 1 \text{ cm}^3 : 8 \text{ cm}^3$

- Dicari perubahan volume bola I dan bola II.

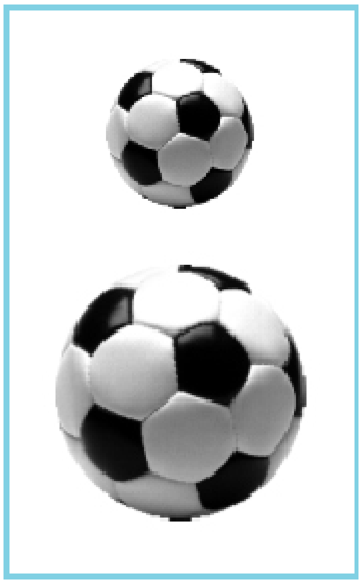
$V_1 : V_2 = 1 : 8$, maka $V_2 = 8V_1$

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times (1)^3 = \frac{4}{3}\pi$$

Oleh karena $V_2 = 8V_1$, maka besar perubahan volume bola I dan bola II adalah:

$$\begin{aligned} \Delta V &= V_2 - V_1 \\ &= 8V_1 - V_1 \\ &= 7V_1 = 7\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \frac{28}{3}\pi \end{aligned}$$

Jadi, besar perubahan volume bola I dan bola II adalah $\frac{28}{3}\pi$ cm^3.



Gambar 2.23

Dua bola dengan jari-jari masing-masing $r_1 = 1$ cm dan $r_2 = 2$ cm

Sumber: Dokumen penerbit

Diskusi

Salin dan lengkapilah tabel berikut! Kerjakanlah dengan temanmu dalam satu kelompok.

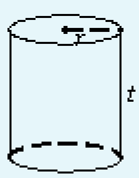
No	Bola 1 r_1	Bola 2 r_2	V_1	V_2	$V_1 : V_2$
1	2 cm	3 cm			
2	3 cm	4 cm			
3	3 cm	5 cm			
4	4 cm	5 cm			
5	5 cm	6 cm			

Adakah relasi antara perbandingan $r_1 : r_2$ dengan perbandingan $V_1 : V_2$ dari jawaban soal nomor 1 sampai dengan 5 di atas?

Jika ada, berilah kesimpulan tentang relasi tersebut!

RANGKUMAN

- Tabung



a. Luas selimut $= 2\pi rt$

b. Luas tabung tanpa tutup.

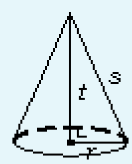
Luas $= 2\pi rt + \pi r^2$

c. Luas tabung tertutup.

Luas $= 2\pi rt + 2\pi r^2 = 2\pi r(t + r)$

d. Volume tabung $= \pi r^2 t$

- Kerucut



a. $s^2 = r^2 + t^2$

b. Luas selimut $= \pi rs$

c. Luas seluruh sisi kerucut.

Luas $= \pi rs + \pi r^2 = \pi r(s + r)$

d. Volume kerucut $= \frac{1}{3}\pi r^2 t$

- Bola

a. Luas bola $= 4\pi r^2$

b. Volume bola $= \frac{4}{3}\pi r^3$

EVALUASI

I. Pemahaman Konsep

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini!

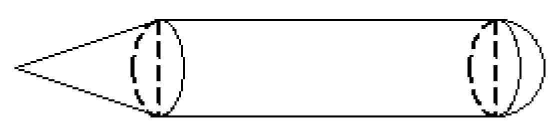
1. Sebuah tabung dengan jari-jari 14 cm dan tinggi 5 cm. tentukanlah:
   a. volume tabung;
   b. luas permukaan tabung
2. Sebuah kerucut dengan garis pelukis 25 cm dan diameter 14 cm. Tentukan luas selimut kerucut!
3. Diketahui bola dengan diameter 28 cm. Tentukan luas dan volume bola!
4. Volume sebuah tabung 0,77 liter. Jika tinggi tabung 20 cm, berapa cm jari-jari alas tabung?
5. Volume sebuah kerucut 2.512 liter dan tingginya 24 dm. Hitunglah:
   a. jari-jari alas kerucut;
   b. panjang garis pelukis;
   c. luas sisi kerucut!
6. Luas sisi sebuah kerucut 1.056 cm^2 dan jari-jari alasnya 12 cm. Hitunglah:
   a. panjang garis pelukis;
   b. tinggi kerucut;
   c. volume kerucut!
7. Volume sebuah tabung 785 liter dan jari-jari alasnya 50 cm. Hitunglah:
   a. tinggi tabung;
   b. luas selimut tabung;
   c. luas sisi tabung tanpa tutup;
   d. luas sisi tabung tertutup!
8. Luas selimut tabung 1,76 m^2 dan tingginya 80 cm. Hitunglah:
   a. jari-jari alas tabung;
   b. luas sisi tabung terbuka;
   c. luas sisi tabung tertutup;
   d. volume tabung!

II. Penalaran dan Komunikasi

Selesaikanlah soal-soal di bawah ini!

1. Jika diketahui 1 cm^3 kawat beratnya 7,5 gram, hitunglah berat kawat yang panjangnya 350 m dan diameter penampangnya 4 mm!
2. Sebuah benda berbentuk kapsul (lihat gambar di bawah).

   Benda tersebut terdiri dari sebuah tabung dan dua belahan bola pada kedua ujungnya. Jari-jari belahan bola 2,1 cm dan panjang benda dari ujung ke ujung yang lain 24,2 cm. Hitunglah:
   a. volume benda;
   b. luas sisi benda!
3. Sebuah benda terdiri dari sebuah tabung, belahan bola, dan sebuah kerucut (lihat gambar di bawah).

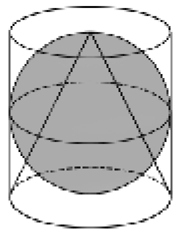


   Jari-jari belahan bola = jari-jari alas kerucut = 2,1 cm. Panjang benda dari ujung ke ujung yang lain 33,1 cm. Tinggi kerucut 6 cm. Hitunglah:
   a. volume benda;
   b. luas sisi benda!
4. Sebuah truk berisi pasir sebanyak 4,95 m^3. Selanjutnya, pasir tersebut diturunkan dari truk sehingga membentuk kerucut setinggi 2,1 m. Hitunglah berapa meter jari-jari alas kerucut itu!
5. Berapakah volume bola terbesar yang dapat dimasukkan ke dalam kubus dengan rusuk 15 cm?
6. V_1 = volume tabung

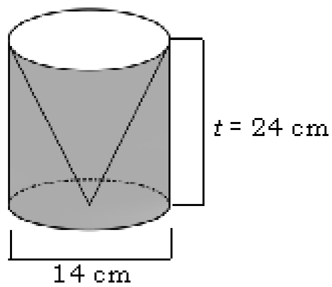
   V_2 = volume bola

V_3 = volume kerucut

Tentukan $V_1 : V_2 : V_3$!



7. Tentukan volume tabung di luar kerucut pada gambar di bawah ini!



8. Diketahui volume belahan bola $\frac{2.156}{3}$ cm^3. Jika $\pi = \frac{22}{7}$. Tentukan:

   a. jari-jari bola;

   b. luas bola padat!

III. Pemecahan Masalah

Selesaikanlah soal-soal di bawah ini!

1. Sebuah rumah makan menyediakan sepiring nasi untuk setiap tamu yang datang. Nasi tersebut diletakkan dalam piring berbentuk belahan bola dengan diameter 15 cm. Suatu hari datang 250 tamu. Hitunglah berapa liter nasi untuk hari itu yang disediakan rumah makan tersebut!

2. Sebuah tabung pengukur memiliki diameter 5 cm dan berisi air sedalam 6 cm. Sebuah bola berdiameter 3 cm, dimasukkan ke dalam tabung dan tenggelam sampai dasar. Berapakah kedalaman air sekarang?

3. Dalam suatu pekan raya, atap salah satu paviliun berbentuk belahan bola dengan diameter 35 m. Jika biaya pembuatan atap per meter persegi Rp 25.000,00, tentukanlah biaya pembuatan atap seluruhnya!

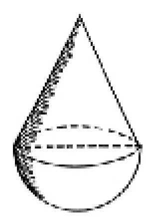
4. Sebuah kerucut dibentuk dari selembar seng yang berbentuk setengah lingkaran dengan diameter 8,4 cm. Tentukanlah jari-jari alas kerucut dan volumenya!

5. Dalam rangka memperingati Hari Kemerdekaan RI, warga Taman Pertiwi Indah mengadakan acara tumpengan. Jari-jari alas tumpeng 70 cm dan tingginya 105 cm. Berapa liter nasi harus disediakan untuk acara tumpengan tersebut?

6. Seorang pedagang memiliki sebuah drum yang berisi penuh minyak goreng. Diameter alas drum 50 cm dan tingginya 80 cm. Minyak tersebut dipindahkan ke kantong-kantong plastik untuk dijual eceran. Bila satu kantong plastik berisi $\frac{1}{4}$ liter, berapa banyak kantong plastik yang harus disediakan?

7. Dalam suatu pameran, atap sebuah paviliun berbentuk belahan bola. Jari-jari belahan bola tersebut 6 m. Jika biaya pembuatan atap Rp 200.000,00 tiap m^2, berapa rupiah biaya pembuatan atap itu?

8. Gambar di bawah ini menunjukkan sebuah bandul emas dengan bentuk gabungan kerucut dan belahan bola. Jari-jari alas kerucut = jari-jari belahan bola, yaitu 4,2 mm, sedangkan tinggi kerucut 6 mm.



   Jika berat 1 cm^3 emas 7,5 gram, harga 1 gram emas Rp 200.000,00 dan biaya pembuatan bandul Rp 50.000,00, hitunglah harga bandul emas tersebut!

9. a. Jari-jari alas tabung 3 cm, tinggi 6 cm. Jari-jari alas kerucut 3 cm, tinggi 6 cm. Jari-jari bola 3 cm. Hitunglah (dalam π) luas selimut tabung, luas selimut kerucut, luas sisi bola, dan tulislah perbandingannya!

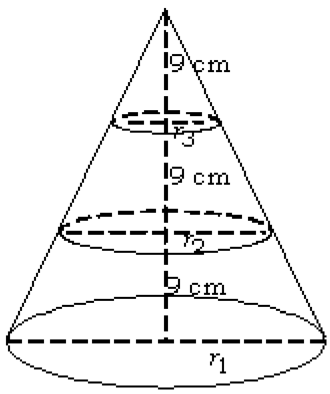
   b. Jari-jari alas tabung 5 cm, tinggi 10 cm. Jari-jari alas kerucut 5 cm, tinggi 10 cm. Jari-jari bola 5 cm. Hitunglah (dalam π) luas selimut tabung, luas selimut kerucut, luas sisi bola, dan tulislah perbandingannya!

c. Apakah perbandingan hasil (a) = perbandingan hasil (b) di atas? Jika sama, tulislah perbandingan yang sama tersebut!

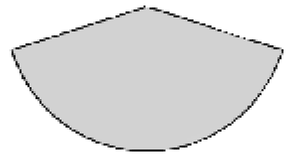
10. Sebuah kerucut terbuat dari kayu dan dipotong horisontal menjadi tiga bagian dengan masing-masing potongan mempunyai tinggi yang sama seperti tampak pada gambar. Jika tinggi kerucut sebelum dipotong 27 cm dan jari-jari alas sebelum dipotong r_1 = 20 cm, maka hitunglah:

    a. Volume masing-masing bagian!

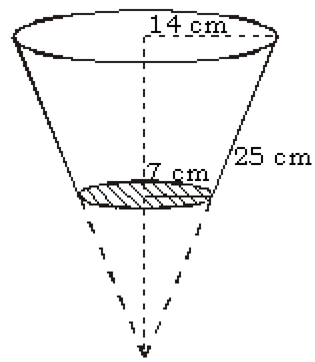
    b. Perbandingan volume masing-masing bagian!



11. Diketahui selembar seng dengan luas 550 cm^2 dan panjang garis pelukis 25 cm seperti terlihat pada gambar di bawah ini. Jika dibuat kerucut, tentukanlah volume kerucut tersebut!

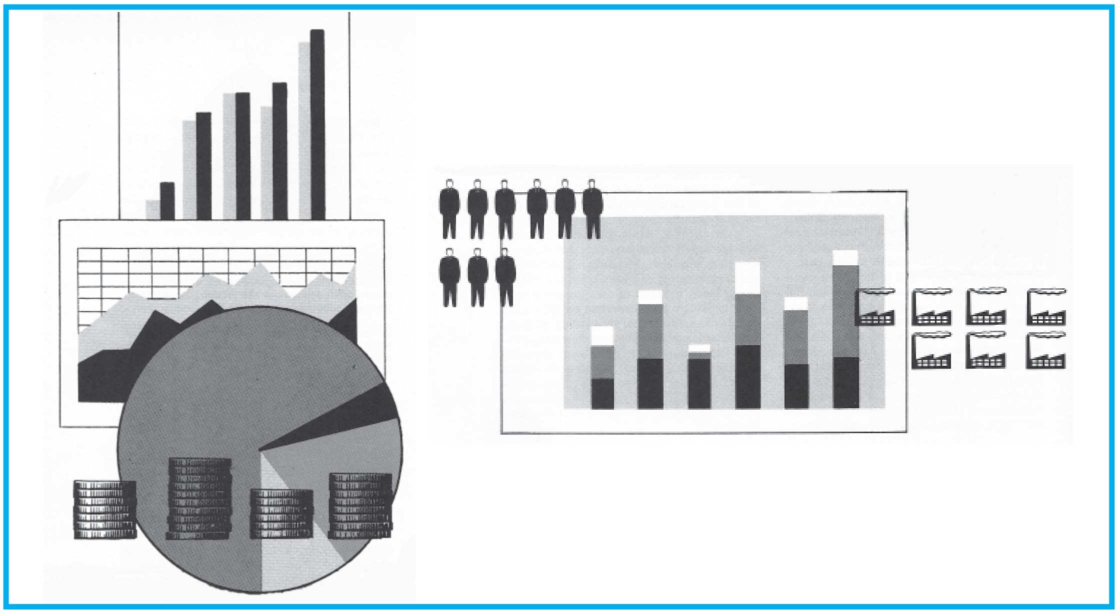


12. Tentukan luas permukaan ember jika jari-jari lingkaran alas 7 cm, jari-jari lingkaran atas 14 cm, dan lebar ember 25!



Bab 3

Statistika



Gambar 3.1
Berbagai macam diagram
Sumber: Ilmu Pengetahuan Populer Jilid 2

Di Sekolah Dasar, kita sudah pernah belajar tentang pengolahan data, yaitu bagaimana cara penyajian data dalam bentuk tabel dan diagram, menentukan nilai rata-rata, median, dan modus dari sekumpulan data, dan juga menafsirkan hasil pengolahan data.

Pernakah kamu berfikir seberapa banyak informasi yang sampai kepada kita melalui bilangan? Karena perkembangan abad komputer elektronik, maka semakin banyak informasi yang dikodekan, diproses, dan disajikan dalam bentuk angka. Kita juga mengharapkan bisa melihat penyajian dalam bentuk angka, mengenai informasi tentang udara, pasar bursa, pengumpulan pendapat umum, transaksi perdagangan, data sensus, kegiatan pemerintah dan masih banyak jenis data yang lain. Informasi berbentuk angka dalam bentuk aslinya sulit untuk ditafsirkan, oleh sebab itu biasanya informasi itu diubah dalam bentuk sebuah tabel, grafik atau diagram. Perhatikan gambar di atas! Gambar itu adalah data dalam bentuk berbagai macam diagram dan grafik. Ada diagram lingkaran, diagram batang, dan piktogram. Dapatkah kalian mencari contoh-contoh diagram yang lain?

Diskusi Pembuka

1. Apa yang kamu ketahui tentang statistika?
2. Dapatkah kamu menyajikan data dalam bentuk tabel?
3. Dapatkah kamu menyajikan data dalam bentuk diagram?
4. Bagaimana kamu mencari nilai rata-rata, median, dan modus?

Pada bab ketiga ini, kita akan membahas tentang statistika. Materi yang akan kita pelajari antara lain penyajian data statistika dalam bentuk tabel dan diagram, mencari nilai rata-rata, median, dan modus.

Statistika adalah ilmu yang mempelajari tentang pengumpulan data, penyusunan data, penyajian data, penganalisisan data, dan pengambilan kesimpulan secara tepat. Yang dimaksud dengan *data* adalah keterangan tentang ciri-ciri objek yang diamati yang kadang-kadang berbentuk angka-angka.

Populasi adalah seluruh objek secara lengkap yang diteliti yang memiliki sifat-sifat sejenis.

Sampel adalah bagian dari populasi yang memiliki sifat-sifat cukup mewakili sifat-sifat yang dimiliki populasi.

Populasi dan sampel

Dalam pengumpulan data, apabila yang diteliti terlalu banyak, peneliti dapat menggunakan sebagian saja sebagai *sampel*. Sampel yang diambil harus dapat mewakili seluruh objek yang diteliti.

Contoh:

1. Dalam menentukan penyakit seseorang, dokter mengambil 10 cc darah penderita tersebut untuk diperiksa di laboratorium.

   Sampel : 10 cc darah penderita
   Populasi : darah penderita

2. Waskito ingin mengetahui apakah duku yang dijual di pinggir jalan itu manis, seperti kata penjualnya. Ia mengambil beberapa buah yang terletak menyebar, lalu dimakan.

   Sampel : beberapa buah duku yang dimakan Waskito
   Populasi : seluruh duku yang dijual di pinggir jalan

3. Kita akan menyelidiki uang saku siswa sekolah kita, maka uang saku semua siswa kelas VII, VIII, dan IX sekolah kita merupakan populasi, sedangkan beberapa siswa kelas VII, VIII, dan IX yang kita catat merupakan sampel.

INFO MATEMATIKA

Uniknya statistik adalah kemampuannya **menghitung** ketidakpastian dengan tepat. Kemampuan tersebut membantu para ahli statistik untuk dapat membuat **pernyataan yang tegas**, lengkap dengan jaminan tingkat ketidakpastian.

Sumber: Kartun Statistik

Larry Gonick dan Woollcott Smith

3.1 Penyajian Data Statistika

Data yang telah dikumpulkan, baik yang berasal dari populasi maupun sampel harus disusun, diatur, dan disajikan dalam bentuk yang jelas dan menarik. Secara garis besar, ada dua cara penyajian data yang sering dipakai, yaitu dengan tabel atau daftar dan dalam bentuk diagram.

3.1.1 Penyajian data dalam bentuk tabel atau daftar

Yang dimaksud penyajian data dalam bentuk tabel adalah dalam bentuk *tabel frekuensi*. Tabel frekuensi digunakan untuk memudahkan perhitungan frekuensi tiap nilai dan untuk memperhatikan seringnya suatu angka muncul dalam kelompok data. Penyajian tabel frekuensi berdasarkan jenis data dapat dibedakan menjadi dua cara, yaitu data sederhana atau tunggal dan data yang dikelompokkan (data berkelompok).

A. Data tunggal/sederhana

Perhatikan contoh pembuatan tabel frekuensi untuk data tunggal berikut ini.

Nilai Matematika hasil ulangan umum semester 1 Kelas IXA tercatat sebagai berikut.

2	4	4	3	3	5	6	6
7	3	6	5	6	7	8	1
7	6	5	7	4	7	3	4
8	5	6	2	5	6	5	4
5	5	5	6	9	4	10	7

Data tersebut dapat ditunjukkan secara lebih jelas dengan menggunakan tabel frekuensi.

Langkah-langkah dalam membuat tabel frekuensi untuk data tunggal adalah:

1. Kita tulis semua nilai atau data dalam satu kolom.
2. Kemudian kita tentukan frekuensinya dengan menggunakan cara turus/*tally*.

Perhatikan tabel frekuensi berikut!

Tabel frekuensi adalah tabel yang menyajikan sebaran frekuensi, disusun menurut beberapa kategori atau kelas nilai peubah tertentu.

Tabel ini dapat disusun untuk peubah tunggal (tabel ekaarah), untuk multipeubah dua (tabel dwiarah), untuk multipeubah tiga, atau lebih.

Tabel 3.1

Nilai	Turus (*Tally*)	Frekuensi (f_i)
1	|	1
2	||	2
3	||||	4
4	~~||||~~ |	6
5	~~||||~~ ||||	9
6	~~||||~~ |||	8
7	~~||||~~ |	6
8	||	2
9	|	1
10	|	1
	Jumlah	40

Dari data tunggal di atas, kita juga bisa menentukan nilai terkecil, nilai terbesar, dan jangkauannya.

Nilai terkecil (data terkecil) = 1

Nilai terbesar (data terbesar) = 10

Jangkauan (rentangan data) = 10 - 1 = 9

B. Data berkelompok

Dalam daftar distribusi frekuensi, banyaknya objek dapat dikumpulkan dalam kelompok-kelompok yang disebut sebagai *kelas interval*. Urutan kelas interval boleh disusun dari data terkecil sampai data terbesar, atau sebaliknya.

Kelas interval adalah nilai selisih antara batas bawah dan batas atas yang menentukan suatu kelas.

Contoh soal 1:

Nilai ulangan umum mata pelajaran Matematika Semester 1 siswa kelas IXA dan IXB ialah sebagai berikut:

Jangkauan atau **rentangan** suatu data adalah selisih antara nilai tertinggi dengan nilai terendah.

79	80	70	68	92	80	63	76	49	84	71	72	75	87	67	80
93	91	60	63	48	90	92	85	76	61	83	88	81	82	88	78
74	70	38	51	71	72	82	70	81	91	56	65	63	74	89	73
90	97	60	66	98	93	81	93	72	91	67	88	75	83	79	86

Buatlah tabel distribusi frekuensi untuk data tersebut!

Jawab:

Dari data di atas, kita dapat membuat tabel distribusi frekuensi dengan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Menyusun data dan menentukan jangkauannya

   Data disusun dari urutan terkecil sampai yang terbesar

38	48	49	51	56	60	60	61	63	63	63	65	66	67	67	68
70	70	70	71	71	72	72	72	73	74	74	75	75	76	76	78
79	79	80	80	80	81	81	81	82	82	83	83	84	85	86	87
88	88	88	89	90	90	90	91	91	91	92	93	93	93	97	98

   (i) Nilai tertinggi = 98

   Nilai terendah = 38

   (ii) Jangkauan (rentangan) = 98 – 38 = 60

2. Menentukan banyaknya kelas

$$\begin{aligned}\text{Banyak kelas} &= 1 + 3{,}3 \log 64\\ &= 1 + 3{,}3(1{,}806)\\ &= 1 + 5{,}9598\\ &= 6{,}9598\\ &\approx 7\end{aligned}$$

3. Menentukan panjang interval kelas

$$\begin{aligned}\text{Panjang interval kelas} &= \frac{\text{jangkauan}}{\text{banyak kelas}}\\ &= \frac{60}{7}\\ &= 8{,}57\\ &\approx 9\end{aligned}$$

4. Menentukan ujung bawah kelas pertama dan seterusnya

   Kelas pertama dengan interval 9 adalah: 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, ditulis 38 - 44.

   Kelas kedua 47 - 55, dan seterusnya.

5. Menentukan frekuensinya

   Frekuensi untuk masing-masing interval kelas dihitung dengan menggunakan sistem turus

Tabel Distribusi Frekuensi:

No. Urut	Kelas Interval	Turus	Frekuensi (f_i)
1	38 - 46	I	1
2	47 - 55	III	3
3	56 - 64	~~IIII~~ II	7
4	65 - 73	~~IIII~~ ~~IIII~~ IIII	14
5	74 - 82	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ II	17
6	83 - 91	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ I	16
7	92 - 100	~~IIII~~ I	6
		Jumlah	64

LATIHAN 1

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

1. Ada pendapat sementara bahwa akhir-akhir ini ada kecenderungan hasil prestasi akademik siswa SMP di DKI Jaya menurun. Lembaga pendidik yang terkait mengadakan suatu penelitian untuk membuktikan kebenaran dan mencari sebab-sebabnya. Tentukan populasi dan sampelnya!
2. Pada suatu pernyataan: "Kadar mercury yang terkandung di Kali Ciliwung melebihi ambang batas". Tentukan populasi dan sampelnya!
3. Ada pemberitaan bahwa kerang hijau di pantai Teluk Jakarta beracun dan mematikan. Tentukan populasi dan sampelnya!
4. Ada suatu pernyataan: "Nilai UAN rata-rata di DKI Jaya untuk jenjang SD, SMP, dan SMA tahun 2004 naik". Tentukan populasi dan sampelnya!
5. "Jumlah produksi padi di Jateng dan DIY tahun 2003 menurun". Dari pernyataan tersebut, tentukan populasi dan sampelnya!
6. Nilai ulangan Matematika Kelas IXA tercatat sebagai berikut.

4	2	1	9	1	7	8	7	7	6
8	3	9	3	3	2	9	8	2	9
8	8	4	9	1	3	7	9	7	9

   a. Tentukan nilai terkecil dan nilai terbesar!
   b. Berapa jangkauan (rentang nilai) data tersebut?
   c. Buatlah tabel frekuensi untuk data tersebut!
7. Dari sekolah SMP di daerah "Y" tahun pelajaran 2003, jumlah siswa Kelas IX diperoleh data sebagai berikut.

38	31	38	39	38	37	33	30
36	32	38	35	36	30	40	37
35	32	39	30	35	38	38	30
37	37	37	39	36	30	33	33
37	37	36	37	30	38	36	35
37	40	38	34	39	40	38	39

   a. Berapa data terkecil?
   b. Berapa data terbesar?
   c. Tentukan jangkauan data tersebut!
   d. Buatlah tabel distribusi frekuensi untuk data tersebut!
8. Nilai Matematika ulangan umum Semester 2 siswa Kelas IX dari suatu sekolah tercatat sebagai berikut.

52	45	53	51	91	56	99	90	91
74	63	45	55	49	46	82	64	72
81	90	70	88	91	52	63	72	82
58	64	74	71	88	52	84	46	72
65	75	95	85	75	69	82	92	67

Buatlah tabel distribusi frekuensi untuk data tersebut dengan interval 6!

9. Buatlah tabel distribusi frekuensi untuk data berikut dengan lebar atau panjang kelas interval 10!

93	62	60	52	65	89	90	90	89	89
49	80	88	70	88	79	70	70	78	88
94	87	69	97	86	69	77	69	68	77
58	86	85	85	76	67	59	84	76	67
95	95	84	76	66	51	54	66	75	84
98	94	83	74	65	51	93	83	73	65
80	93	82	72	65	43	42	62	72	81
70	92	81	62	39	71	61	31	82	91

10. Susunlah data berikut dengan kelas interval yang sesuai!

98	73	66	90	85	81	77	69	69	62
65	89	93	97	45	88	65	84	51	82
49	87	90	55	88	89	83	37	62	84
86	68	67	79	94	65	81	67	82	95
70	78	63	61	58	92	86	82	66	71

3.1.2 Berbagai penyajian data dalam bentuk diagram

Data-data yang dikumpulkan dapat disajikan dalam bentuk:

a. Piktogram

Piktogram umumnya digunakan untuk data yang jumlahnya besar dan bilangan yang dibulatkan. Misalkan data 3425,25 sulit digambarkan dalam bentuk piktogram. Oleh karena itu, bilangan tersebut dibulatkan menjadi 3.500.

Penyajian data dalam diagram gambar tidak memerlukan salib sumbu.

b. Diagram batang

Untuk menyajikan data dalam bentuk diagram batang, yang perlu diperhatikan adalah:

1. Melukis sumbu mendatar dan sumbu tegak berpotongan.
2. Membuat skala yang sesuai.

c. Diagram garis

Diagram garis paling sesuai apabila data bersifat kontinu (terus-menerus).

d. Diagram lingkaran

Ada dua cara untuk membuat diagram lingkaran, yaitu:

1. Membagi lingkaran menurut data yang ada dengan menggunakan busur derajat.
2. Membagi keliling lingkaran

INFO MATEMATIKA

Proses pengumpulan data angka dan menyajikannya dalam sebuah bentuk yang bermanfaat dan dapat dimengerti adalah bagian yang sangat penting dari statistika.

Statistika tidak hanya penting untuk komunikasi, tetapi juga memberikan landasan bagi pengambilan keputusan. Pemerintah menggunakan statistika secara luas dalam merencanakan kebutuhan anggaran belanjanya dan menetapkan tarif pajaknya.

Sumber: Ilmu Pengetahuan Populer 2

Untuk lebih jelasnya perhatikanlah contoh soal 2 di bawah ini!

Contoh soal 2:

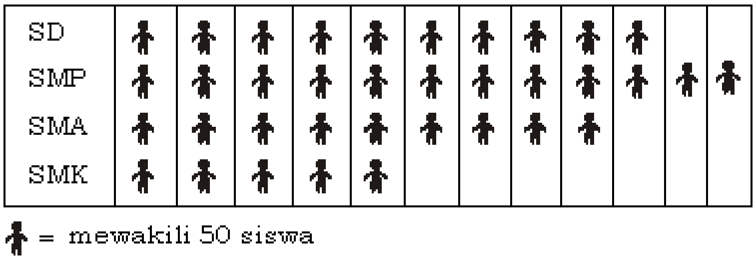
Yayasan Pendidikan PELITA HARAPAN mengelola sekolah dengan jumlah murid sebagai berikut.

SD : 500 siswa
SMP : 600 siswa
SMA : 450 siswa
SMK : 250 siswa

Data tersebut dapat disajikan dalam bentuk diagram berikut.

a. Piktogram

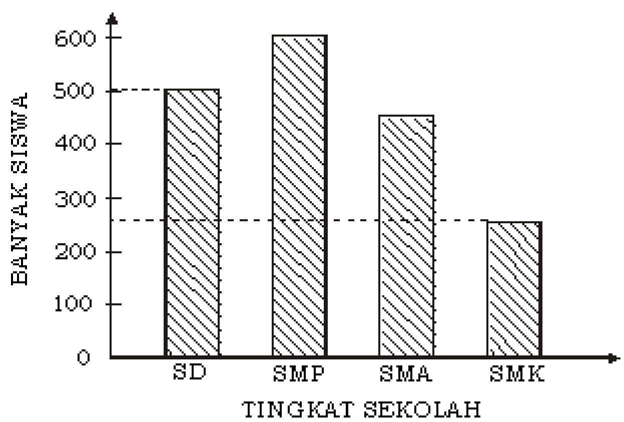
Pada penyajian data dalam bentuk piktogram, setiap satu gambar mewakili 50 siswa.



Dari gambar di atas kita dapat mengetahui bahwa siswa SD ada 500 orang, siswa SMP ada 600 orang, siswa SMA ada 450 orang dan siswa SMK ada 250 orang.

b. Diagram batang

Untuk data pada contoh soal 2 dapat disajikan diagram batang dengan langkah awal kita buat sumbu Cartesius dengan menyatakan sumbu mendatar menyatakan tingkat sekolah dan sumbu tegak menyatakan banyak siswa. Setelah itu baru kita buat diagram batangnya sesuai dengan banyak siswa SD, SMP, SMA, dan SMK. Lihat diagramnya di bawah ini!



Dari diagram batang di atas dapat diketahui bahwa siswa SD berjumlah 500 orang, siswa SMP berjumlah 600 orang, siswa SMA berjumlah 450 orang, dan siswa SMK berjumlah 250 orang.

c. Diagram garis (grafik garis)

Untuk penyajian data dalam bentuk diagram garis langkah awal juga sama, yaitu dengan membuat sumbu Cartesius dengan menyatakan sumbu mendatar menyatakan tingkat sekolah dan sumbu tegak menyatakan banyak siswa. Setelah itu kita beri tanda titik untuk pasangan tingkat sekolah dan banyak siswa. Kemudian baru kita hubungkan titik-titik tersebut dengan menggunakan garis. Lihat diagramnya berikut ini!

Piktogram (diagram gambar)

Adalah diagram berupa gambar atau lambang, yang mewakili jumlah tertentu dari data

Diagram batang

Biasanya menggambarkan data berbentuk kategori, yang digunakan untuk membandingkan data atau menunjukkan hubungan suatu data dengan data keseluruhan

Diagram garis

Umumnya digambarkan untuk data yang berkaitan dengan waktu. Kegunaannya untuk melihat gambaran perubahan peristiwa dalam periode waktu tertentu

Diagram lingkaran

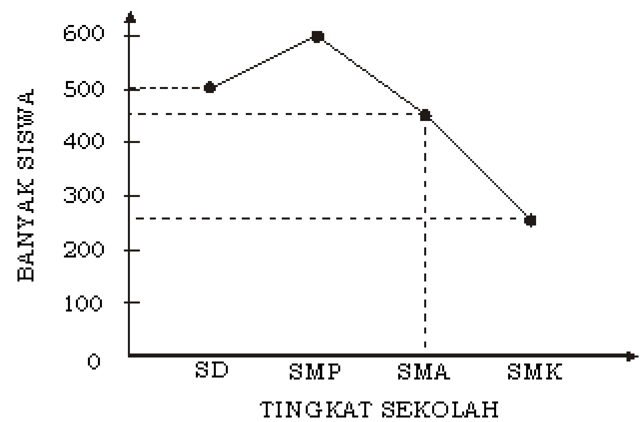
Yaitu diagram yang menggunakan daerah lingkaran untuk menggambarkan data tertentu. Biasanya digunakan untuk menyajikan data yang tidak terlalu banyak

Sumber: Makalah oleh

Dra. Th. Widyantini, M.Ed dan

Dra. Pujianti, M.Ed

(PPPG Matematika Yogyakarta)



Dari diagram batang di atas dapat diketahui bahwa siswa SD berjumlah 500 orang, siswa SMP berjumlah 600 orang, siswa SMA berjumlah 450 orang, dan siswa SMK berjumlah 250 orang.

d. Diagram lingkaran

Sebelumnya, lingkaran kita bagi-bagi menjadi beberapa sektor. Tiap sektor melukiskan persentase jumlah data.

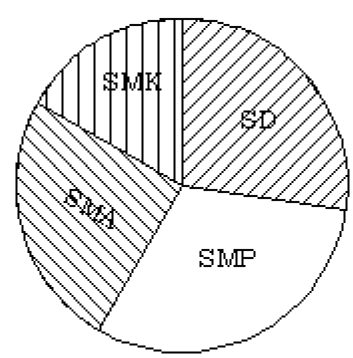
Karena satu putaran atau satu lingkaran = 360°, maka besar tiap sudut pusat tiap sektor dihitung sebagai berikut.

- Jumlah seluruh siswa = 500 + 600 + 450 + 250 = 1.800
- Sudut pusat sektor SD $= \dfrac{500}{1.800} \times 360° = 100°$

Sudut pusat sektor SMP $= \dfrac{600}{1.800} \times 360° = 120°$

Sudut pusat sektor SMA $= \dfrac{450}{1.800} \times 360° = 90°$

Sudut pusat sektor SMK $= \dfrac{250}{1.800} \times 360° = 50°$



LATIHAN 2

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

1. Data kegiatan ekstrakurikuler siswa SMP Nusantara ialah sebagai berikut.

Bola voli	:	100 siswa
Bola basket	:	125 siswa
Tenis meja	:	75 siswa
Paskibra	:	50 siswa
Pramuka	:	150 siswa

Gambarlah piktogram dan diagram lingkaran dari data tersebut!

2. Hasil panen padi selama semester pertama tahun 2004 di Kabupaten Suka Tani tercatat sebagai berikut.

Januari	:	300 ton kering
Februari	:	200 ton kering
Maret	:	250 ton kering
April	:	350 ton kering
Mei	:	400 ton kering
Juni	:	300 ton kering

Gambarlah piktogram, diagram batang, dan diagram lingkaran dari data di atas!

3. Di bawah ini adalah data tentang luas hutan lindung pada tahun 2001.

No.	Daerah	Luas wilayah (dalam ribuan Ha)
1.	Sumatra	7.100
2.	Jawa	560
3.	Bali	85
4.	Nusa Tenggara	1.200
5.	Kalimantan	6.900
6.	Sulawesi	3.900
7.	Maluku	5.500
8.	Irian Jaya	8.700

Gambarlah diagram batang yang sesuai untuk data tersebut!

4. Berikut ini adalah data bantuan dari IGGI tahun 1967 - 1973 (dalam juta dolar AS).

Tahun	Jumlah
1967/1968	US$ 200
1968/1969	US$ 325
1969/1970	US$ 500
1970/1971	US$ 600
1971/1972	US$ 640
1972/1973	US$ 670

Buatlah diagram batang dan diagram garis dari data tersebut!

5. Ali mengadakan pengamatan tentang jumlah angkutan umum bus kota dan minibus di jalan tertentu selama seminggu dan pada waktu tertentu. Diperoleh data sebagai berikut.

No.	Jenis kendaraan/ angkutan	Hari						
		Senin	Selasa	Rabu	Kamis	Jumat	Sabtu	Minggu
1.	Minibus	65	61	59	55	63	52	48
2.	Bus	48	43	40	43	46	35	33

Gambarlah diagram batang dari data tersebut!

6. Data statistika penerimaan siswa baru SMP Nusantara tahun 1993/1994 sampai dengan tahun 1999/2000 tercatat sebagai berikut.

Tahun 1993/1994	:	156 siswa
Tahun 1994/1995	:	160 siswa
Tahun 1995/1996	:	180 siswa
Tahun 1996/1997	:	224 siswa
Tahun 1997/1998	:	180 siswa
Tahun 1998/1999	:	240 siswa
Tahun 1999/2000	:	300 siswa

Gambarlah diagram batang dari data di atas!

7. Apakah keunggulan dan kelemahan penyajian data dalam bentuk:
   a. piktogram;
   b. diagram batang;
   c. diagram garis;
   d. diagram lingkaran?

3.1.3 Histogram dan poligon frekuensi

Distribusi berarti penyebaran atau penyaluran. Distribusi frekuensi umumnya digunakan untuk pengukuran data-data yang dikelompokkan. Tujuan pengelompokkan ke dalam distribusi frekuensi adalah untuk memperoleh gambaran yang sederhana, jelas, dan sistematis.

Penyusunan distribusi frekuensi dapat dibagi menjadi empat tahap sebagai berikut.

1) Mencari nilai terbesar dan nilai terkecil dari data yang ada untuk menentukan jangkauan.
2) Menentukan jumlah kelas interval, paling sedikit lima dan paling banyak lima belas.
3) Lebar kelas interval untuk setiap kelas adalah sama dalam bentuk bilangan-bilangan yang sederhana.
4) Diusahakan tidak satu data pun terlewatkan.

A. Histogram

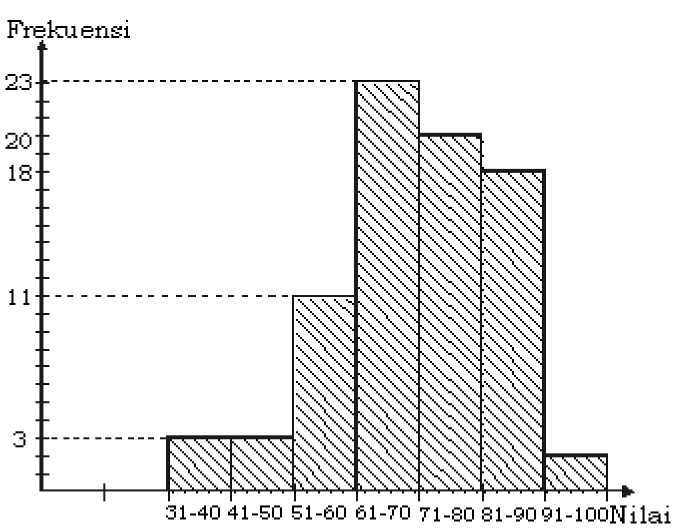
Histogram adalah grafik frekuensi bertangga, membentuk serangkaian persegi panjang yang panjangnya sebanding dengan frekuensi yang terdapat dalam kelas-kelas interval bersangkutan. Sumbu mendatar menyatakan nilai, jenis, dan waktu, sedangkan sumbu tegak menyatakan frekuensi.

Contoh soal 3:

Gambarkan histogram dari data berikut!

Nilai Ulangan Matematika Siswa Kelas IX

No. Urut	Nilai	Frekuensi (f_i)
1	31 - 40	3
2	41 - 50	3
3	51 - 60	11
4	61 - 70	23
5	71 - 80	20
6	81 - 90	18
7	91 - 100	2
		$\sum f_i = 80$

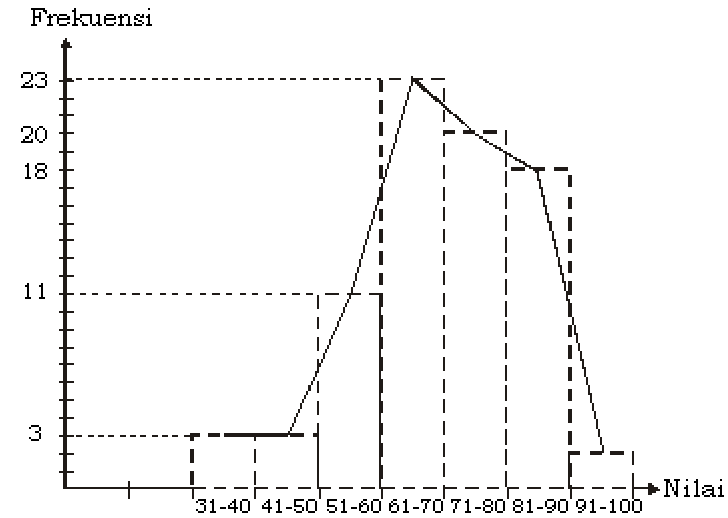


Istilah poligon sering kita jumpai pada statistik. Poligon biasa dikaitkan dengan grafik frekuensi atau histogram. Bila histogramnya berbentuk persegi panjang, maka poligonnya dibuat dengan cara menghubungkan titik tengah setiap puncak persegi panjang itu.

B. Poligon Frekuensi

Dalam geometri, poligon berarti segi banyak. Cara menggambarkan poligon frekuensi, umumnya dengan jalan menghubungkan titik-titik tengah setiap puncak persegi panjang pada histogram, sehingga diperoleh garis atau kurva garis.

Perhatikan histogram pada contoh di atas! Dari histogram tersebut, dapat dibuat poligon frekuensi, seperti gambar 3.1 berikut ini.



Gambar 3.2

Berdasarkan data pada tabel contoh 3, kita membuat gambar histogram seperti tampak pada gambar di samping. Sumbu tegak menyatakan frekuensi, sedangkan sumbu datar menyatakan Nilai Ulangan Matematika Siswa Kelas IX.

Perhatikan pula gambar 3.2! Persegi panjang pada gambar tersebut merupakan histogram dan garis yang menghubungkan titik tengah persegi panjang itulah yang disebut poligon.

LATIHAN 3

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

1. Keuntungan koperasi suatu sekolah dalam satu semester pada tahun 1999 tercatat sebagai berikut.

No. Urut	Bulan	Keuntungan dalam ribuan rupiah
1	Juli	400
2	Agustus	500
3	September	550
4	Oktober	350
5	November	600
6	Desember	250

   a. Hitunglah keuntungan rata-rata tiap bulan!

   b. Gambarlah histogram dan poligon frekuensinya pada satu gambar!

2. Suatu distribusi frekuensi tersusun sebagai berikut.

No. Urut	Berat (Kg)	Frekuensi
1	30 - 34	4
2	35 - 39	6
3	40 - 44	10
4	45 - 49	8
5	50 - 54	12
6	55 - 59	14
7	60 - 64	6

   Dari data di atas, gambarlah histogram dan poligon frekuensinya pada satu gambar!

3. Nilai ulangan matematika tentang pengantar statistika tercatat sebagai berikut.

Nilai ulangan	1-10	11-30	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80
Frekuensi								

   Gambarlah histogram dan poligon frekuensinya pada diagram yang sama!

4. Distribusi frekuensi hasil produksi padi kering per hektar (dalam kuintal) untuk 100 desa di daerah Sukabumi dan Yogyakarta tahun 1969 ialah sebagai berikut.

Hasil produksi dalam kuintal	Jumlah desa
20 - 34	8
35 - 49	24
50 - 64	27
65 - 79	20
80 - 94	8
95 - 109	8
110 - 124	4
135 - 139	1

   a. Gambarlah histogram dari data tersebut!

   b. Gambarlah poligon frekuensinya pada diagram yang berbeda!

5. Suatu distribusi frekuensi tersusun sebagai berikut.

No. Urut	Kelas Interval	Frekuensi
1	21 - 27	0
2	28 - 34	1
3	35 - 41	4
4	42 - 48	10
5	49 - 55	16
6	56 - 62	19
7	63 - 69	15
8	70 - 76	9
9	77 - 83	3

Gambarlah histogram dan poligon frekuensi pada diagram yang sama!

6. Data di bawah ini menyatakan penghasilan setiap hari pada saat Pak Ali sebagai tukang ojek.
   a. Hitunglah rataan pendapatan Pak Ali setiap harinya!
   b. Gambarlah histogram dan poligon frekuensi pada satu diagram!

7. Pengukuran tinggi badan dari 40 siswa dinyatakan dalam sentimeter dan diperoleh hasil sebagai berikut.

124	140	145	135	150	158	147	148
153	151	126	145	148	127	152	150
149	156	152	124	127	152	149	152
151	148	145	152	148	127	132	150
148	155	156	150	147	150	145	126

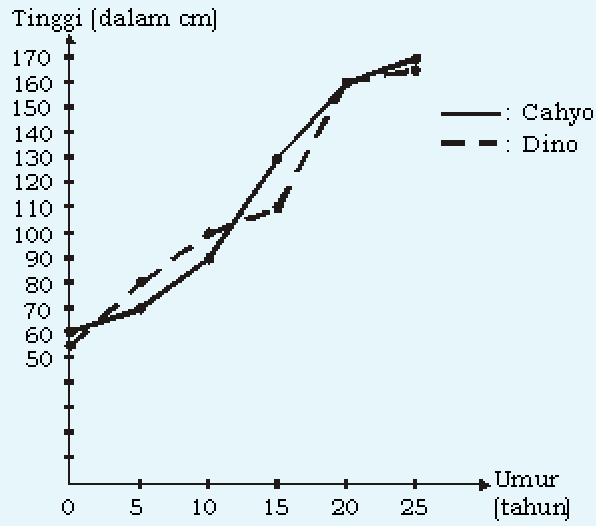
   a. Buatlah tabel frekuensi dengan menggunakan kelas interval yang sesuai, kemudian hitunglah mean!
   b. Gambarkan histogram data tersebut!
   c. Gambarkan poligon frekuensi pada diagram yang sama!

8. Berat badan diukur dalam kilogram dari 40 siswa adalah sebagai berikut.

31	38	35	41	43	43	44	43	48	50
32	39	36	42	44	43	42	41	45	54
35	35	40	42	43	42	40	45	49	52
36	37	40	40	42	44	41	47	47	53

   a. Buatlah tabel frekuensi dengan panjang kelas interval 5!
   b. Hitunglah mean data tersebut!
   c. Gambarkan poligon frekuensi pada diagram yang sama!

9. Grafik garis berikut menggambarkan pertumbuhan tinggi Cahyo dan Dino.



Salin dan lengkapilah tabel berikut!

Usia	Lahir	5 th	10 th	15 th	20 th	25 th
Tinggi Cahyo						
Tinggi Dino						

Dalam grafik, tinggi Cahyo dan Dino pada usia 30 tahun tidak dicatat. Tapi kita bisa membuat perkiraan berdasarkan data grafik tersebut.

10. Dari grafik soal nomor 9, kita juga bisa melakukan interpolasi. Apakah interpolasi tersebut?
    Salin dan lengkapilah tabel berikut dengan memperhatikan grafik soal nomor 9.

Usia (tahun)	6	7	8	13	14	17	22
Tinggi Cahyo							
Tinggi Dino							

Kegiatan tersebut merupakan contoh interpolasi.

TUGAS PROYEK

1. Bilangan-bilangan berikut menyatakan hasil ujian akhir metode statistika:

23	60	79	32	57	74	52	70	82	36
80	77	81	95	41	65	92	85	55	76
52	10	64	75	78	25	80	98	81	67
41	71	83	54	64	72	88	62	74	43
60	78	89	76	84	48	84	90	15	79
34	67	17	82	69	74	63	80	85	61

   a. Dengan menggunakan 9 selang dengan nilai terendah 10, buat sebaran frekuensinya dan sebaran frekuensi kumulatifnya!
   b. Untuk data yang sudah dikelompokkan buatlah histogram frekuensi, poligon frekuensi, dan ogif frekuensinya!
2. The American Physics Association melaporkan data mahasiswa tingkat terakhir bidang studi fisika menurut wilayah geografik pada tahun 1979.

Wilayah Geografik	Banyaknya Mahasiswa
New England	524
Middle Atlantic	818
E.N. Central	815
W.N. Central	367
S. Atlantic	679
E.S. Central	196
W.S. Central	436
Mountain	346
Pacific	783

   Sajikan data kategorik tersebut dalam bentuk diagram balok. (Penentuan lebar balok untuk data kategorik bergantung pada keinginan kita sendiri.)

3.2 Ukuran Pemusatan

3.2.1 Nilai rataan (mean)

A. Untuk data tunggal

Nilai rataan atau rata-rata atau mean merupakan salah satu ukuran untuk memberikan gambaran yang lebih jelas dan singkat tentang sekumpulan data dari suatu persoalan, baik berupa sampel maupun populasi.

Nilai rataan merupakan salah satu dari ukuran gejala pusat, merupakan wakil sekumpulan data atau dianggap suatu nilai yang paling dekat dengan hasil ukuran sebenarnya.

Nilai rataan dapat dibedakan menjadi:

1) rataan hitung,
2) rataan ukur, dan
3) rataan harmonis.

Yang akan dibahas pada subbab ini adalah rataan hitung. Rataan ukur dan rataan harmonis belum dibicarakan pada subbab ini. Mean atau nilai rataan hitung merupakan nilai rata-rata dari data.

Kita dapat mencari nilai rata-rata dengan cara membagi jumlah seluruh nilai data yang ada dengan banyaknya data. Untuk mencari mean kita tidak perlu mengurutkan data yang ada, yang penting semua data dijumlahkan.

Biasanya, nilai rataan dinyatakan dengan $\bar{x}$ (dibaca: $x$bar). Banyaknya pengukuran dinyatakan dengan n dan jumlah dinyatakan dengan $\sum$ (baca: sigma). Jadi, jumlah seluruh pengukuran dinyatakan dengan:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \;;\quad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

Sigma merupakan huruf Yunani yang dilambangkan dengan "$\sum$" adalah lambang untuk menyatakan "penjumlahan".

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

Nilai rataan (mean) dapat dirumuskan:

$$\text{Nilai rataan} = \frac{\text{jumlah seluruh pengukuran}}{\text{banyak pengukuran}}$$

atau $$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Mean (dibaca: *min*) diartikan sebagai rata-rata atau nilai rataan. Mean digunakan untuk membandingkan sampel-sampel yang sejenis. Mean dicari dengan menghitung jumlah semua ukuran dibagi dengan banyaknya ukuran.

Untuk menghitung mean dari daftar (tabel) distribusi frekuensi digunakan cara dengan mengambil titik tengah kelas interval. Titik tengah ini dikalikan dengan frekuensi. Kemudian, jumlah hasil kali tersebut dibagi dengan jumlah frekuensi.

Jika penyajian data tersebut dinyatakan dengan tabel frekuensi maka jumlah pengukuran dapat dinyatakan dengan:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = \text{jumlah frekuensi}$$

Jadi, rumus tersebut dapat ditulis:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \;;\quad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

Contoh soal 4:

Carilah nilai rataan dari 25, 23, 26, dan 30!

Jawab:

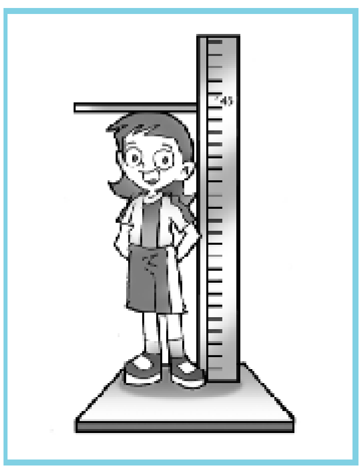
$$\text{Nilai rataan} = \bar{x} = \frac{25 + 23 + 26 + 30}{4} = \frac{104}{4} = 26$$

Contoh soal 5:

Hasil pengukuran tinggi badan sejumlah siswa SMP ialah sebagai berikut (dalam cm).

145,	145,	146,	147,	149,	149,	149,	149,	149,	150
150,	154,	160,	153,	155,	159,	156,	157,	160,	152

Hitunglah nilai rataan dari hasil pengukuran tersebut!



Gambar 3.3
Pengukuran tinggi badan

Jawab:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

$$= \frac{2(145) + 146 + 147 + 5(149) + 2(150) + 152 + 153 + 154 + 155 + 156 + 157 + 159 + 2(160)}{20}$$

$$= \frac{3.034}{20}$$

$$= 151{,}7$$

Kita juga bisa menyelesaikan soal di atas dengan menggunakan rumus yang sudah diberikan di atas sebagai berikut.

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = 20 \quad \text{dan} \quad \sum_{i=1}^{20} x_i = 3.034$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{3.034}{20} = 151{,}7$$

Dapat pula diselesaikan dengan membuat tabel frekuensi, sebagai berikut.

Tabel frekuensi

Tinggi badan	Turus	Frekuensi (f_i)	$x_i \cdot f_i$
145	||	2	290
146	|	1	146
147	|	1	147
149	~~||||~~	5	745
150	||	2	300
152	|	1	152
153	|	1	153
154	|	1	154
155	|	1	155
156	|	1	156
157	|	1	157
159	|	1	159
160	||	2	320
		$\sum f_i = 20$	$\sum x_i f_i = 3.034$

Rumus: $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{3.034}{20} = 151{,}7$$

Jadi, rataan dari data tinggi badan siswa SMP tersebut adalah 151,7 cm.

B. Untuk data berkelompok

Untuk menentukan nilai rataan data berkelompok digunakan langkah-langkah berikut.

1. *Membuat tabel frekuensi*

   Contoh bentuk tabel frekuensinya:

Tabel 3.2

No.	Kelas interval	Titik tengah (x_i)	Turus	Frekuensi	$x \cdot f$
1.	38 - 44	41	|	1	41

Keterangan tabel:

Titik tengah (x_i): suatu nilai yang mewakili kelas interval masing-masing

Titik tengah = $\frac{1}{2}$ (ujung kelas bawah interval + ujung kelas atas interval)

Misalnya, pada kelas interval pertama:

x_i = nilai yang mewakili data pada interval kelas pertama

$x = \frac{1}{2}(38 + 44) = \frac{1}{2} \times 82 = 41$

2. *Menggunakan rumus:*

Rumus yang digunakan adalah:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}}$$

Contoh soal 6:

Diketahui tabel frekuensi Nilai Ulangan Matematika Siswa Kelas IX.

No.	Kelas interval	Titik tengah (x_i)	Turus	Frekuensi (f_i)	$x_i \cdot f_i$
1.	38 - 44	41	|	1	41
2.	45 - 51	48	|||	3	144
3.	52 - 58	55	||||	4	220
4.	59 - 65	62	~~||||~~ ||	7	434
5.	66 - 72	69	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ |	16	1.104
6.	73 - 79	76	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~	15	1.140
7.	80 - 86	83	~~||||~~ ~~||||~~ |	11	913
8.	87 - 93	90	~~||||~~ ||	7	630
				$\sum f_i = 64$	$\sum x_i f_i = 4.626$

Tentukan:

a. nilai rataan (mean) nilai ulangan matematika kelas IX dari data di atas;

b. banyak siswa yang nilainya kurang dari nilai rataan; dan

c. banyak siswa yang nilainya lebih dari nilai rataan!

Jawab:

a. Nilai rataan (mean) = $\bar{x} = \frac{4.626}{64} = 72,28$

b. Banyak siswa yang nilainya kurang dari nilai rataan

$= 1 + 3 + 4 + 7 + 16 = 31$ siswa

c. Banyak siswa yang nilainya lebih dari nilai rataan

$= 15 + 11 + 7 = 33$ siswa

Carilah cara lain untuk menghitung nilai rataan!

3.2.2 Median

Median adalah suatu nilai yang letaknya di tengah-tengah data setelah data diurutkan dari yang terkecil sampai yang terbesar atau sebaliknya dari yang terbesar sampai yang terkecil. Median dituliskan dengan *Me*.

50% 50%

median

Untuk mencari median, kita harus memperhatikan jumlah data yang diketahui. Maksudnya apakah data yang ada ganjil atau genap. Jika data yang diketahui itu ganjil, mediannya adalah data yang ada di tengah-tengah setelah data diurutkan. Jika data itu genap, mediannya adalah jumlah dua data yang berada ditengah-tengah dibagi dua.

3.2.3 Modus

Modus adalah suatu nilai yang paling sering muncul (terjadi) atau suatu nilai yang paling banyak frekuensinya.

Modus dituliskan dengan *Mo*.

Kita akan memperhatikan tentang nilai modus. Meskipun modus adalah suatu nilai yang paling sering muncul atau yang paling banyak frekuensinya, tetapi modus tidak selalu ada. Hal ini terjadi bila semua nilai mempunyai frekuensi yang sama. Untuk data tertentu, ada kemungkinan terdapat beberapa nilai dengan frekuensi tertinggi dan dalam hal ini, kita mempunyai lebih dari satu modus.

Contoh:

Dari 10 anak SMP yang diambil secara acak dicatat berapa kali mereka menonton film di bioskop selama bulan lalu. Data yang diperoleh adalah 2, 3, 1, 2, 4, 2, 5, 4, 1, dan 4. Dalam kasus ini, terdapat dua modus, yaitu 2 dan 4, karena 2 dan 4 mempunyai frekuensi tertinggi. Kasus dengan 2 modus dikenal dengan *bimodus*.

Contoh soal 7:

Hasil ulangan Matematika beberapa siswa diperoleh sebagai berikut.

4, 5, 8, 6, 7, 8, 5, 9, 8, 7, 7, 6, 6, 8, 5

Carilah modus dan mediannya!

Jawab:

Data diurutkan menurut besarnya:

4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9

Median (*Me*) = 7, sebab nilai 7, (yang dilingkari) tepat di tengah letaknya.

Modus (*Mo*) = 8, karena nilai 8 paling sering muncul, frekuensinya 4.

Contoh soal 8:

Hasil pengukuran berat badan (dalam kg) dari sejumlah anak adalah sebagai berikut.

35, 33, 34, 36, 37, 38, 34, 36, 36, 37
39, 38, 36, 37, 38, 36, 39, 39, 37, 32

Carilah median dan modusnya!

Jawab:

Data diurutkan menurut besarnya:

32, 33, 34, 34, 35, 36, 36, 36, 36, 36, 37, 37, 37, 37, 38, 38, 38, 39, 39, 39

Median (*Me*) $= \dfrac{36+37}{2} = \dfrac{73}{2} = 36,5$

Modus (*Mo*) $= 36$

Gambar 3.4

Pengukuran berat badan

Mengapa diperoleh median 36,5 dan modus 36?

Carilah cara lain untuk menentukan median!

Contoh soal 9:

Hasil pengukuran tinggi badan (dalam cm) dari sejumlah siswa SMP disusun dalam tabel frekuensi sebagai berikut.

Tinggi badan (cm)	Frekuensi (f_i)
143	1
145	1
146	1
147	3
149	4
150	5
151	4
155	3
158	2
159	1
	$\sum f_i = 25$

Median (Me)

Data ke-1 s.d 13 (Me) s.d 25

Karena banyaknya data adalah ganjil, yaitu 25, maka nilai yang terletak di tengah-tengah data setelah diurutkan besarnya adalah urutan ke-13. Letak kelas median ditentukan dengan cara menjumlahkan frekuensi, dari kelas pertama sampai mendapatkan jumlah 13.

Jumlah frekuensi adalah: $1 + 1 + 1 + 3 + 4 + 5 = 15$, berarti urutan ke-13 sudah tercakup di dalamnya. Sehingga, Me terletak pada kelas yang berfrekuensi 5, yaitu kelas yang bertinggi badan 150 cm. Selanjutnya dihitung sebagai berikut:

$$\underbrace{\underbrace{1 + 1 + 1 + 3 + 4}_{10} + 5}_{15}$$

Jadi, median (Me) dari data tersebut adalah 150 cm dan modusnya (Mo) adalah 150 cm.

LATIHAN 4

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

1. Hitunglah mean dan median dari data di bawah ini!
   a. 2, 8, 7, 7, 5, 6, 5, 8, 7, 7, 4, 6, 10, 9
   b. 25 kg, 24 kg, 26 kg, 22 kg, 28 kg, 27 kg, 26 kg, 26 kg, 23 kg, 29 kg, 25 kg, 26 kg
   c. 125 cm, 123 cm, 121 cm, 128 cm, 127 cm, 125 cm, 126 cm, 129 cm, 125 cm, 125 cm, 128 cm
   d. 14 jam, 13 jam, 15 jam, 18 jam, 15 jam, 16 jam, 15 jam, 14 jam, 15 jam, 14 jam, 15 jam, 16 jam, 18 jam, 17 jam, 15 jam, 13 jam, 12 jam, 15 jam

2. Jumlah pulsa pembicaraan telepon di rumah Pak Amir pada tahun 1994 tercatat sebagai berikut.

Jan	Feb	Mrt	Apr	Mei	Juni	Juli	Agst	Spt	Okt	Nov	Des
250	200	400	250	275	260	290	275	280	350	450	450

Hitunglah nilai rataan/mean data tersebut!

3. Penghasilan bersih pak Ali setiap minggu selama empat minggu sebagai penjual minuman adalah sebagai berikut.

Hari	MINGGU			
	I	II	III	IV
Senin	Rp 3.750,00	Rp 2.250,00	Rp 4.300,00	Rp 2.700,00
Selasa	Rp 4.850,00	Rp 3.800,00	Rp 2.800,00	Rp 3.700,00
Rabu	Rp 5.650,00	Rp 2.100,00	Rp 2.850,00	Rp 3.350,00
Kamis	Rp 3.500,00	Rp 4.000,00	Rp 2.500,00	Rp 1.700,00
Jumat	Rp 2.900,00	Rp 3.150,00	Rp 3.350,00	Rp 4.100,00
Sabtu	Rp 2.350,00	Rp 3.650,00	Rp 4.150,00	Rp 2.350,00
Jumlah				

Hitunglah mean pendapatan Pak Ali setiap minggu!

4. Produksi dari beberapa bahan galian (dalam ton) di suatu provinsi ialah sebagai berikut.

Bahan Galian	Hasil Produksi		
	1969	1970	1971
Timah	17.000	190.000	19.000
Batu bara	198.000	172.000	198.000
Bijih timah	156.000	600.000	900.000
Bauksit	765.000	122.900	1.237.000

Hitunglah mean hasil produksi pada tahun 1969, 1970, 1971 untuk masing-masing jenis bahan galian!

5. Diketahui tabel frekuensi:

No. Urut	Nilai	Frekuensi (f_i)
1	3	2
2	4	3
3	5	8
4	6	10
5	7	9
6	8	7
7	9	1

a. Lengkapilah tabel frekuensi di atas, kemudian hitunglah nilai rataannya!

b. Tentukan modusnya!

6. Banyak telur (dalam butir) yang dikumpulkan setiap hari selama enam minggu oleh Pak Ali sebagai peternak ayam ialah sebagai berikut.

76	92	89	99	100	87
80	93	80	86	96	77
93	90	88	81	94	82
88	99	85	83	95	94
80	101	81	100	94	93
88	84	90	95	91	97
98	79	97	91	102	88

Buatlah tabel frekuensi dari data tersebut dengan lebar kelas 5, kemudian hitunglah mean data tersebut!

7. Buatlah tabel frekuensi dari data mengenai temperatur minimum (dalam derajat celcius) berbagai daerah pegunungan di Indonesia yang tercatat sebagai berikut!

24	18	18	11	4	20	15	23	24	23	16	17
22	13	23	16	20	16	19	13	20	16	18	13
19	11	16	15	14	15	18	14	13	21	16	12
13	18	27	10	15	25	14	16	21	7	18	15
21	20	20	23	13	20	20	22	14	24	16	15

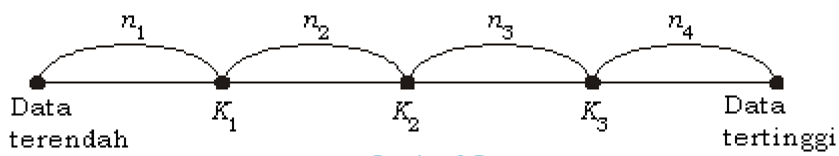
Hitunglah mean dan median dari data tersebut!

3.3 Ukuran Pencaran (Pengayaan)

Median dapat juga dipakai sebagai ukuran perduaan. Lalu, apakah arti kuartil?

Kuartil sebagai ukuran perempatan. Nilai-nilai kuartil membagi suatu data (setelah diurutkan) menjadi empat bagian yang sama banyak.

Ruas garis berikut menggambarkan suatu data dan letak kuartil.



Gambar 3.5
Letak kuartil

> Salah satu hal yang harus diperhatikan dalam menentukan nilai kuartil adalah dengan memastikan bahwa data sudah diurutkan terlebih dahulu.

Data terbagi menjadi empat bagian yang sama banyak, yaitu $n_1 = n_2 = n_3 = n_4$, di mana

$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n$ = jumlah atau banyaknya data.

n_2 = banyak data yang terletak antara K_1 dan K_2.

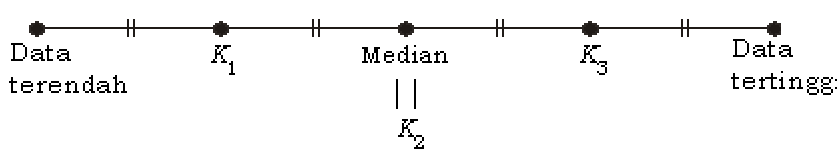
n_3 = banyak data yang terletak antara K_2 dan K_3.

Cara menentukan K_1, K_2, dan K_3 adalah sebagai berikut.

1. Urutkan data dari yang terkecil sampai yang terbesar!
2. Setelah data urut, tentukan K_2!

   K_2 = median, dan cara menentukan median untuk data ganjil atau genap sudah dibahas sebelumnya!
3. Tentukan K_1 dengan cara mencari nilai tengah keseluruhan data dari yang terendah sampai K_2!
4. Tentukan K_3 dengan cara mencari nilai tengah dari data antara K_2 dan data yang tertinggi!

Bila keterangan tersebut dibuat bagan, maka bagannya sebagai berikut.



Gambar 3.6
Letak kuartil

Contoh soal 10:

Data setelah diurutkan: 1, 3, 4, 5, 6, 9, 11, 13, 15, 18, 20, 25.

Jumlah data (n) = 12

$$K_2 = \text{median} = \frac{1}{2}(\text{data ke-6} + \text{data ke-7})$$

$$= \frac{1}{2}(9 + 11) = 10$$

Data di bawah K_2 : 1, 3, 4, 5, 6, 9.

Nilai tengah data tersebut adalah $\frac{4+5}{2} = 4\frac{1}{2}$.

Jadi, $K_1 = 4\frac{1}{2}$.

Data di atas K_2 : 11, 13, 15, 18, 20, 25.

Nilai tengah data tersebut adalah $\frac{15+18}{2} = \frac{33}{2} = 16\frac{1}{2}$.

Jadi, $K_3 = 16\frac{1}{2}$.

Nilai tengah

Nilai tengah atau median merupakan ukuran letak yang paling umum digunakan dalam statistika. Ukuran ini mudah dihitung dan memanfaatkan semua informasi atau data yang dimiliki. Data tersebut diurutkan terlebih dahulu dari yang terkecil hingga yang terbesar atau sebaliknya, kemudian dicari nilai tengahnya. Jika banyaknya data ganjil, maka nilai tengah adalah nilai yang berada tepat di tengah-tengah dari keseluruhan data yang ada. Tetapi, jika jumlah data genap, maka nilai tengah dicari dengan menentukan rata-rata dari dua nilai yang berada di tengah.

Contoh soal 11:

Data setelah diurutkan: 3, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 15, 16, 19, 20.

Jumlah data (n) = 11 ganjil

K_2 = median adalah data ke-6 = 11

Data di bawah K_2 : 3, 5, 7, 8, 10.

Nilai tengah data tersebut menjadi K_1, $K_1 = 7$.

Data di atas K_2 : 13, 15, 16, 19, 20.

Nilai tengah data tersebut menjadi K_3, $K_3 = 16$.

Kesimpulan:

Contoh 7: 1 3 4 | 5 6 9 | 11 13 15 | 16 20 25

K_1 (antara 4 dan 5), K_2 (antara 9 dan 11), K_3 (antara 15 dan 16)

Contoh 8: 3 5 7 8 10 11 13 15 16 19 20

K_1 = 7, K_2 = 11, K_3 = 16

Berikut beberapa istilah dalam ukuran pencaran.

a. Jangkauan atau rentangan adalah selisih data terbesar dengan data terkecil.

b. Jangkauan interkuartil atau rentang interkuartil adalah nilai kuartil ke tiga (K_3) dikurangi nilai kuartil pertama (K_1)

$$\Leftrightarrow \boxed{RAK = K_3 - K_1}$$

c. Jangkauan semi interkuartil = $\frac{1}{2}(K_3 - K_1)$

Untuk memudahkan menentukan jangkauan atau rentangan, maka data harus diurutkan terlebih dahulu.

Dengan memperhatikan pengertian tentang kuartil, K_1, K_2, dan K_3 dapat ditentukan nilainya.

Kuartil pertama (K_1) adalah suatu bilangan yang terletak pada perempatan pertama dari sekelompok data yang telah diurutkan.

Jumlah data pada contoh 9 dan 10 hanya sedikit. Bagaimanakah jika datanya cukup banyak?

Jadi, bila n = banyak data maka letak kuartil dapat ditentukan dengan:

$$K_1 = \frac{1}{4}(n+1)$$

$$K_2 = \frac{2}{4}(n+1)$$

$$K_3 = \frac{3}{4}(n+1)$$

Kuartil pertama (K_1) adalah suatu bilangan yang sedemikian sehingga seperempat dari data lebih kecil dari padanya.

Kuartil ke dua (K_2) adalah suatu bilangan yang sedemikian sehingga setengah dari data lebih kecil dari padanya.

Secara analog, kita dapat mendefinisikan kuartil ke tiga.

Contoh soal 12:

Data setelah diurutkan: 9, 9, 10, 13, 14, 17, 19, 19, 21, 22, 23, 25, 25, 29, 33, 35, 35, 39, 43, 47.

$n = 20$

Letak $K_1 = \frac{1}{4}(20+1) = 5\frac{1}{4}$

Nilai K_1 adalah data ke-5 ditambah $\frac{1}{4}$ (data ke-6 dikurangi data ke-5)

Nilai $K_1 = 14 + \frac{1}{4}(17-14)$

$= 14 + \frac{1}{4} \times 3 = 14\frac{3}{4}$

Letak $K_2 = \frac{2}{4}(20+1) = \frac{1}{2} \times 21 = 10\frac{1}{2}$

Nilai K_2 adalah data ke-10 ditambah $\frac{1}{2}$ (data ke-11 dikurangi data ke-10)

Nilai $K_2 = 22 + \frac{1}{2}(23-22)$

$= 22 + \frac{1}{2}$

$= 12\frac{1}{2}$

Letak $K_3 = \frac{3}{4}(20+1) = \frac{3}{4} \times 21 = 15\frac{3}{4}$

Nilai K_3 adalah data ke-15 ditambah $\frac{3}{4}$ (data ke-16 dikurangi data ke-15)

$$\text{Nilai } K_3 = 33 + \frac{3}{4}(35 - 33)$$

$$= 33 + \frac{3}{4} \times 2$$

$$= 33 + 1\frac{1}{2}$$

$$= 34\frac{1}{2}$$

RAK = Rentang antarkuartil

= Rentang interkuartil

$= K_3 - K_1$

$= 34\frac{1}{2} - 14\frac{3}{4}$

$= 19\frac{3}{4}$

LATIHAN 5

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

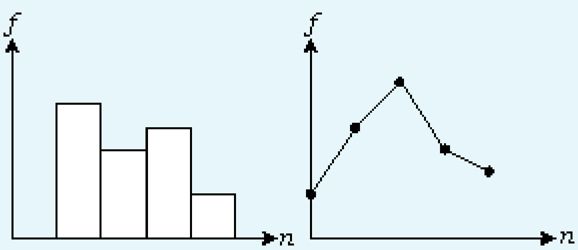
1. Hitunglah Jangkauan, K_1, K_2, K_3, dan *RAK* dari setiap data berikut!
   a. 5, 6, 7, 8, 8, 9, 10, 11, 8, 5
   b. 5, 5, 6, 8, 10, 7, 8, 11, 2
   c. 4, 6, 7, 15, 9, 12, 5, 7, 3
   d. 37, 36, 38, 39, 42, 40, 37, 41, 38, 25
2. Nilai ulangan matematika siswa kelas IXA adalah sebagai berikut.
   4, 7, 6, 9, 5, 6, 8, 7, 7, 5, 8, 6, 9, 6, 4, 3, 8, 5, 7, 10, 4, 5, 2, 9, 9, 8, 7, 6, 6, 7, 8, 7, 10, 9, 8
   Tentukan:
   a. letak K_1, K_2, dan K_3;
   b. nilai K_1, K_2, dan K_3;
   c. Jangkauan interkuartil;
   d. Jangkauan semi interkuartil!
3. Berikut ini adalah data dari Perpustakaan Sekolah pada tanggal 2 Mei 2004.

Banyak buku yang dipinjam	Banyak siswa yang meminjam
1	3
2	4
3	5
4	7
5	3
6	2

   a. Tentukan mean, median, dan modus!
   b. Tentukan nilai K_1, K_2, dan K_3!
   c. Berapakah jangkauan interkuartil dan semi interkuartil?

RANGKUMAN

- Statistika adalah ilmu yang mempelajari tentang pengumpulan, penyusunan, penyajian sampai pengambilan data-data serta pengambilan kesimpulan secara tepat.
- Pengumpulan data dari jumlah populasi yang besar dapat diwakili dwengan mengambil sampel dari populasi tersebut.
- Data tunggal maupun data kelompok, dapat disajikan dalam bentuk daftar, tabel frekuensi, maupun dalam bentuk diagram, seperti:
  diagram batang;
  diagram garis (grafik);
  piktogram (diagram gambar);
  diagram lingkaran.
- Distribusi frekuensi kelompok data dapat disajikan dalam bentuk diagram histogram dan poligon.



- Ukuran pemusatan
  a. Mean $(\bar{x})$: nilai rataan
  b. Median (*Me*) : nilai yang letaknya di tengah-tengah data yang telah diurutkan
  c. Modus (*Mo*) : nilai yang sering muncul
- Mean
  a. Untuk data tunggal

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

di mana: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ = nilai data
n = banyak data

atau dapat juga ditulis:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}}$$

di mana:

$\sum_{i=1}^{n} x_i$ = jumlah data

$\sum_{i=1}^{n} f_i$ = jumlah frekuensi

$i = 1, 2, 3, \ldots, n$

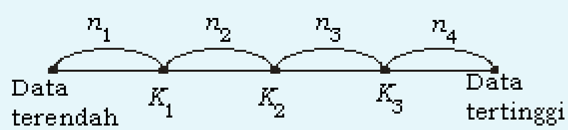
  b. Untuk data berkelompok

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}}$$

di mana :

x_i = nilai tengah (*mid-point*)

- Kuartil (ukuran perempatan)



Jumlah data = $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$

dan $n_1 = n_2 = n_3 = n_4$

a. Nilai K_1 terletak pada urutan $= \frac{1}{4}(n+1)$

b. Nilai K_2 terletak pada urutan $= \frac{2}{4}(n+1)$

c. Nilai K_3 terletak pada urutan $= \frac{3}{4}(n+1)$

- Jangkauan atau rentangan adalah selisih data terbesar dengan data terkecil
- Jangkauan interkuartil/rentang interkuartil = $K_3 - K_1$
- Jangkauan semi kuartil = $\frac{1}{2}(K_3 - K_1)$

EVALUASI

I. Pemahaman Konsep

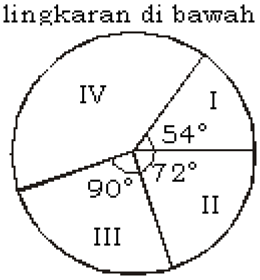
Kerjakanlah soal-soal di bawah ini!

1. Setiap siswa SMP Bintang Terang memiliki satu kegiatan olahraga yang paling digemari. Diperoleh keterangan sebagai berikut.

   Sepak bola : 210 orang
   Basket : 180 orang
   Voli : 90 orang
   Catur : 45 orang
   Tenis meja : 75 orang

   Gambarlah piktogram, diagram batang, diagram garis, dan diagram lingkaran dari data di atas!

2. Perbandingan 7.200 siswa yang diterima pada empat sekolah digambarkan sebagai diagram lingkaran di bawah ini.



   Berapa banyak siswa yang diterima di sekolah IV?

3. Tentukan mean, median, dan modus untuk data berikut!

Nilai	4	5	6	7	8	9	10
Frekuensi	4	5	9	12	6	3	1

4. Tentukan mean, median, dan modus untuk data berikut!

Tinggi (cm)	160	161	162	163	164	165	166	167
Frekuensi	10	12	18	11	9	19	14	7

5. Produksi tambang di Indonesia tahun 1963 adalah sebagai berikut.

minyak mentah	81,2%
gas alam	12,7%
timah	0,5%
lain-lain	5,6%

   Gambarlah diagram lingkaran dari data tersebut!

II. Penalaran dan Komunikasi

Selesaikanlah soal-soal di bawah ini!

1.

No. Urut	Kelas Interval	Frekuensi
1	40 - 46	7
2	47 - 53	12
3	54 - 60	13
4	61 - 67	17
5	68 - 74	25
6	75 - 81	15
7	82 - 88	14
8	89 - 95	16

   Dari data di atas, tentukan:

   a. mean;

   b. pada interval yang mana modus berada!

2. Tabel frekuensi dari tinggi badan sejumlah siswa SMA sebagai berikut.

Tinggi (cm)	Jumlah siswa
146 - 150	2
151 - 155	5
156 - 160	21
161 - 165	15
166 - 170	4
171 - 175	3

   Hitunglah mean data tersebut!

3. Dari sekumpulan data berikut: 8, 4, 5, 10, 2, 7, 9, 1 carilah nilai kuartil bawah dan kuartil atasnya!

4. Gambarlah diagram lingkaran yang menyajikan data upah (dalam ribuan rupiah) per minggu di suatu pabrik. Jika ternyata rata-rata upah per minggu Rp 60.000,00, tentukan upah per minggu untuk 90° karyawan!

5. Di dalam suatu kelas terdapat 50 siswa yang terdiri dari 30 siswa perempuan dan

20 siswa laki-laki. Pada suatu hari diadakan ujian matematika. Ternyata nilai rata-rata dari siswa perempuan adalah 8,0 dan nilai rata-rata dari siswa laki-laki adalah 7,0. Tentukan nilai rata-rata keseluruhan siswa!

III. Pemecahan Masalah

Selesaikanlah soal-soal di bawah ini!

1.

No. Urut	Kelas Interval	Frekuensi
1	50 - 54	4
2	55 - 59	6
3	60 - 64	8
4	65 - 69	10
5	70 - 74	16
6	75 - 79	3
7	80 - 84	2
8	85 - 89	1

Berat badan sejumlah siswa ditunjukkan pada tabel frekuensi di atas!

Tentukan:

a. panjang kelas interval;
b. kelas interval ke-3;
c. ujung bawah kelas ke-4;
d. ujung atas kelas ke-5;
e. titik tengah kelas ke-6;
f. ujung atas kelas;
g. ujung bawah kelas!

2. Suatu observasi tentang tinggi 40 siswa (dalam cm) SMP Bahagia, diperoleh data sebagai berikut.

138	164	150	132	144	125	149	157
146	158	140	147	136	148	152	144
168	126	138	176	163	119	154	165
146	173	142	147	135	153	140	135
161	145	135	142	150	156	145	128

a. Buatlah tabel frekuensi dengan panjang kelas interval 10!
b. Gambarlah histogram dan poligon frekuensi pada satu diagram!

3. Jumlah tabungan per bulan dari para buruh perusahaan Gemah Ripah (dalam ribuan rupiah) sebagai berikut.

24	23	29	31	42	32	48	60	47	32
31	52	26	46	54	42	49	41	23	22
47	26	57	47	35	63	38	48	42	34
41	45	59	24	24	44	63	69	45	38
62	42	46	24	61	17	53	34	38	28
54	20	42	36	43	51	44	24	57	24
48	19	39	25	56	47	43	42	52	61
21	18	54	41	35	48	59	31	42	33
21	57	45	25	38	30	51	45	42	47
43	49	27	29	37	29	49	32	45	30

a. Buatlah tabel frekuensi dengan panjang interval kelas 10!
b. Gambarlah histogram dan poligon frekuensinya pada satu diagram!

4. Menurut penulis ekologi Jacqueline Killeen, fosfat dalam deterjen dapat mengubah danau menjadi rawa-rawa yang kemudian mengering menjadi padang pasir tandus. Data berikut mencantumkan banyaknya fosfat per satu kali mencuci dengan mesin cuci, dalam satuan gram, bagi suatu contoh acak berbagai jenis deterjen menurut aturan pemakaian yang disarankan:

Deterjen	Fosfat per satu kali mencuci (g)
A & P Blue Sail	48
Dash	47
Consentrated All	42
Cold Water All	42
Breeze	41
Oxydol	34
Ajax	31
Sears	30
Fab	29
Cold Power	29
Bold	29
Rinso	26

Untuk data kandungan fosfat tersebut, hitunglah:

a. nilai rata-ratanya;
b. mediannya;
c. modusnya;
d. kuartil bawanya;
e. kuartil atasnya; dan
f. jangkauan semi kuartilnya!

Bab 4

Peluang

Gambar 4.1

Alat-alat yang biasa digunakan dalam probabilitas (peluang)

Sumber: Dokumen penerbit

Dalam suatu pertunjukan, sering dilakukan undian berhadiah dari potongan karcis yang kita miliki. Potongan karcis yang ada pada panitia diletakkan pada satu tempat. Sebelum pengambilan, biasanya potongan-potongan karcis itu diaduk. Setelah itu, barulah diambil satu persatu sesuai dengan hadiah yang disediakan. Pengambilan dilakukan secara acak, yaitu sembarang tanpa dipilih-pilih. Setiap orang yang memiliki potongan karcis memiliki kemungkinan yang sama untuk memperoleh hadiah.

Selain contoh di atas, banyak lagi kejadian yang berkaitan dengan kemungkinan suatu kejadian. Pada permainan yang menggunakan dadu, seringkali seseorang mengharapkan muncul mata dadu tertentu saja. Hal ini wajar, karena setiap mata dadu mempunyai kemungkinan yang sama untuk muncul. Coba carilah contoh-contoh lain yang sesuai!

Pada bab keempat ini, kita akan membahas tentang peluang. Materi yang akan kita pelajari antara lain ruang sampel suatu percobaan, peluang suatu kejadian, frekuensi harapan, dan dua kejadian majemuk.

Diskusi Pembuka

1. Apa yang kamu ketahui tentang peluang?
2. Apa yang kamu ketahui tentang ruang sampel suatu percobaan?
3. Apa yang kamu ketahui tentang nilai kemungkinan?
4. Apakah yang dimaksud dengan frekuensi harapan?
5. Apa yang kamu ketahui tentang dua kejadian saling lepas dan kejadian saling bebas?

4.1 Ruang Sampel Percobaan

Untuk memahami pengertian peluang, lakukan percobaan melempar uang logam berikut!

Kita ambil sekeping uang logam lima ratusan yang mempunyai gambar di satu sisi dan angka di sisi yang lain. Kemudian, uang logam tersebut dilempar atau diundi, permukaan yang di sebelah atas (yang muncul) dicatat. Hasilnya kita catat dalam bentuk tabel seperti berikut ini.

Tabel 4.1

Sisi uang logam	Hasil yang diperoleh
Angka (A)	....
Gambar (G)	....

Lakukan lemparan sebanyak mungkin atau gabungkan yang kamu peroleh dengan hasil temanmu. Dari hasil tersebut, kita dapat menghitung frekuensi relatif (frekuensi nisbi) munculnya masing-masing sisi uang logam.

Dugaan tentang seringnya suatu data muncul disebut frekuensi relatif munculnya data.

Frekuensi relatif munculnya masing-masing sisi uang logam adalah sebagai berikut.

1. Sisi gambar = $\dfrac{\text{jumlah hasil gambar yang diperoleh}}{\text{banyaknya lemparan yang dilakukan}}$

2. Sisi angka = $\dfrac{\text{jumlah hasil angka yang diperoleh}}{\text{banyaknya lemparan yang dilakukan}}$

Contoh soal 1:

Kita akan menghitung peluang munculnya sisi gambar hasil lemparan mata uang yang tercatat sebagai berikut.

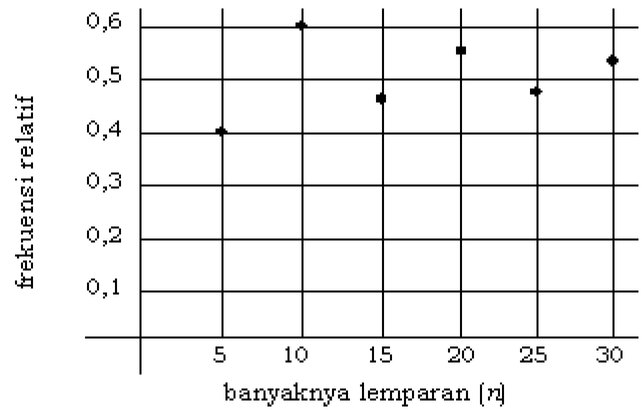
Banyaknya lemparan (n)	5	10	15	20	25	30
Frekuensi munculnya gambar (r)	2	6	7	11	12	16
Frekuensi relatif munculnya gambar (f) $f = \dfrac{r}{n}$	0,4	0,6	0,47	0,55	0,48	0,53

Gambar 4.2
Mata uang dengan sisi gambar
Sumber: Dokumen penerbit

$$\text{Rata-rata frekuensi relatif} = \frac{0,4 + 0,6 + 0,47 + 0,55 + 0,48 + 0,53}{6}$$

$$= \frac{3,03}{6} = 0,505$$

Hasil tersebut dapat ditunjukkan dengan grafik berikut:



Dari perhitungan dan gambar, tampak bahwa semakin banyak jumlah lemparan mata uang logam maka frekuensi munculnya gambar akan semakin mendekati bilangan 0,500. Bilangan ini disebut peluang munculnya sisi gambar.

Karena kedua sisi bersifat simetri maka kemungkinan munculnya masing-masing sisi adalah sama. Untuk percobaan dalam beberapa kali pelemparan, akan diperoleh hasil yang mendekati nilai tertentu, yaitu $\frac{1}{2}$. Hasil frekuensi relatif yang mendekati nilai tertentu inilah yang disebut nilai kemungkinan atau *peluang* atau *probabilitas*.

LATIHAN 1

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

1. Lemparkan mata uang logam untuk menentukan nilai peluang munculnya gambar!

   a. Lengkapilah tabel berikut!

	Banyaknya lemparan				
	20	40	60	80	100
Frekuensi munculnya gambar					
Frekuensi relatif munculnya gambar					

   b. Buatlah grafik dari data pada tabel di atas!

   c. Berdasarkan grafik, berapa kira-kira besar peluang munculnya gambar?

2. Lemparkan sebuah dadu berbentuk kubus untuk menentukan nilai peluang munculnya mata dadu 5!

   a. Lengkapilah tabel berikut!

	Banyaknya lemparan				
	48	96	144	192	240
Frekuensi munculnya mata dadu 5					
Frekuensi relatif munculnya mata dadu 5					

   b. Buatlah grafik dari data pada tabel di atas!

   c. Berdasarkan grafik, berapa kira-kira besar peluang munculnya mata dadu 5?

Dari percobaan halaman 86 kita dapat mencari nilai kemungkinan suatu kejadian, yaitu dengan rumus:

$$\text{Nilai kemungkinan} = \frac{\text{banyaknya suatu kejadian}}{\text{banyaknya seluruh kejadian yang mungkin terjadi}}$$

Himpunan semua hasil yang mungkin terjadi disebut *ruang sampel*, dilambangkan dengan S. Banyak sedikitnya hasil yang diinginkan dan ruang sampel sangat mempengaruhi nilai kemungkinan.

1. Ruang sampel

Besar kecilnya ruang sampel tergantung dari banyaknya objek yang digunakan dalam percobaan. Semakin banyak objek yang digunakan percobaan, semakin besar ruang sampelnya. Untuk percobaan pelemparan uang logam, ruang sampelnya hanya dua, yaitu Gambar dan Angka. Kita dapat menuliskan ruang sampelnya, yaitu {Gambar, Angka}. Untuk percobaan pelemparan dadu, ruang sampelnya adalah $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, karena dadu mempunyai enam sisi dan masing-masing sisi mempunyai titik yang berjumlah 1, 2, 3, 4, 5, dan 6.

Pada percobaan pelemparan dua mata uang logam atau lebih secara bersamaan, ruang sampelnya akan berbeda dengan pelemparan hanya satu mata uang logam.

Contoh soal 2:

Pada percobaan pelemparan dua mata uang logam, hasil yang mungkin dapat ditunjukkan dengan tabel berikut.

Gambar 4.3
Dua mata uang logam

	A	G
A	(A, A)	(A, G)
G	(G, A)	(G, G)

— uang logam II

A = angka

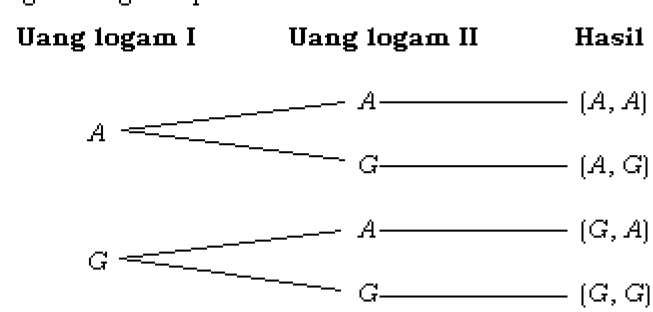
G = gambar

uang logam I

Ruang sampel = S = $\{(A, A), (A, G), (G, A), (G, G)\}$

Tiap-tiap anggota dari ruang sampel disebut *titik sampel*.

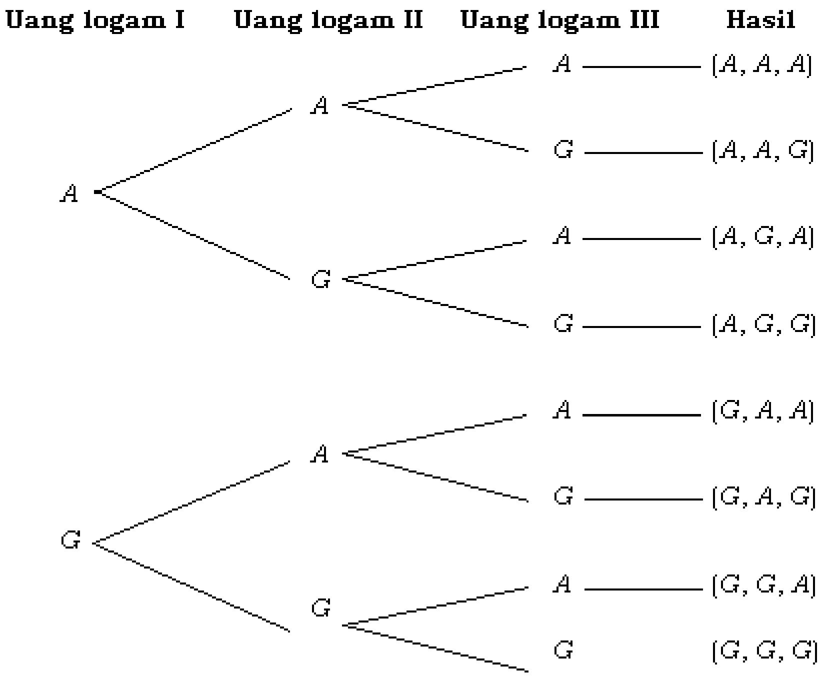
Atau dengan diagram pohon:



Ruang sampel : S = $\{(A, A), (A, G), (G, A), (G, G)\}$

Contoh soal 3:

Pada percobaan pelemparan tiga mata uang logam, untuk mencari ruang sampelnya tidak bisa dibuat dengan tabel, tetapi dengan diagram pohon.



Gambar 4.4

Tiga mata uang logam

Sumber: Dokumen penerbit

Tentukan ruang sampelnya!

Ruang sampel : S = {(A, A, A), (A, A, G), (A, G, A), (A, G, G), (G, A, A), (G, A, G), (G, G, A), (G, G, G)}

Contoh soal 4:

Pada percobaan pelemparan sebuah dadu, hasil yang dapat kita peroleh adalah mata dadu yang tampak di atas. Sebutkan ruang sampelnya!

Jawab:

Ruang sampel: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2. Nilai kemungkinan

Di bawah ini, diberikan beberapa contoh mencari nilai kemungkinan suatu kejadian.

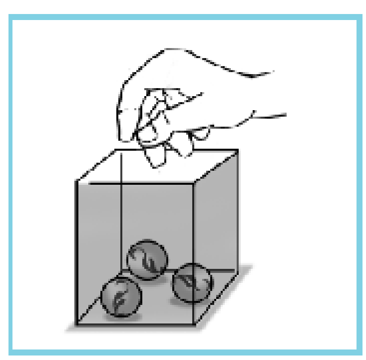
1) Dalam satu kotak terdapat tiga kelereng, yaitu berwarna merah, biru, dan kuning.

   Ruang sampel = $\{$merah, biru, kuning$\}$

   Jika satu kelereng diambil secara acak, maka nilai kemungkinan terambilnya kelereng yang berwarna:

   a) merah = $\frac{1}{3}$ b) biru = $\frac{1}{3}$

   c) kuning = $\frac{1}{3}$ d) merah atau kuning = $\frac{2}{3}$



Gambar 4.5

Pengambilan kelereng dalam kotak

2) Pada percobaan pelemparan sebuah dadu diketahui:

   Ruang sampel: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

   Mata dadu genap yang mungkin muncul = $\{2, 4, 6\}$

   Jumlah mata dadu genap ada 3

Gambar 4.6
Dadu

Mata dadu ganjil yang mungkin muncul = $\{1, 3, 5\}$
Jumlah mata dadu ganjil ada 3
Mata dadu prima yang mungkin muncul = $\{2, 3, 5\}$
Jumlah mata dadu prima ada 3
Nilai kemungkinan munculnya:

- mata dadu 1 = $\frac{1}{6}$
- mata dadu 2 = $\frac{1}{6}$
- mata dadu 3 = $\frac{1}{6}$
- mata dadu 4 = $\frac{1}{6}$
- mata dadu 5 = $\frac{1}{6}$
- mata dadu 6 = $\frac{1}{6}$
- mata dadu genap $= \frac{\text{jumlah mata dadu genap}}{\text{jumlah seluruh mata dadu}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- mata dadu ganjil $= \frac{\text{jumlah mata dadu ganjil}}{\text{jumlah seluruh mata dadu}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- mata dadu prima $= \frac{\text{jumlah mata dadu prima}}{\text{jumlah seluruh mata dadu}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

3) Dalam satu kelas, terdapat 23 anak laki-laki dan 17 anak perempuan. Banyaknya anggota ruang sampel adalah 40. Jika dipilih satu anak untuk mewakili kelas dalam pertandingan, kemungkinan terpilihnya anak laki-laki adalah $\frac{23}{40}$ dan anak perempuan adalah $\frac{17}{40}$.

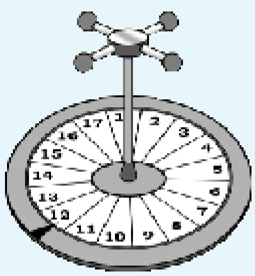
LATIHAN 2

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

1. Dalam satu kantong, terdapat 5 manik-manik biru, 7 manik-manik merah, dan 8 manik-manik putih. Jika diambil satu secara acak, berapa nilai kemungkinan terambilnya manik-manik dengan warna:
   a. merah, b. biru,
   c. putih?
2. Suatu yayasan menjual kupon undian berhadiah guna mencari dana. Nomor seri kupon ditulis dengan tiga angka, dimulai dari angka 000 sampai 999. Berapa besar nilai kemungkinan untuk memperoleh hadiah pertama jika membeli:
   a. 1 kupon, b. 2 kupon,
   c. 10 kupon?
3. Dari seperangkat kartu *bridge*, diambil satu secara acak. Berapa besar nilai kemungkinan terambilnya kartu:
   a. bergambar hati, b. as daun,
   c. as, d. Q,
   e. K daun, f. bilangan prima?
4. Sebuah bidang sisi empat beraturan bertuliskan 1, 2, 3, atau 4 pada masing-masing sisinya. Jika bidang tersebut dilempar, berapa besar kemungkinan munculnya sisi bertuliskan:
   a. 3, b. 4,
   c. bilangan genap?
5. Suatu huruf dipilih secara acak dari huruf-huruf pembentuk kata MATEMATIKA. Berapa besar kemungkinan terpilih:
   a. huruf A, b. huruf M,
   c. vokal, d. konsonan?

6. Dari seperangkat kartu *bridge*, dipakai kartu-kartu yang bernomor saja. Jika kartu-kartu tersebut diambil secara acak, berapa besar kemungkinan terambil kartu:
   a. bernomor 2,
   b. bernomor 4 dan bergambar keriting,
   c. bernomor 8 dan berwarna merah?

7. Sebuah pusingan bernomor 1 sampai dengan 17 seperti gambar di bawah diputar. Berapa kemungkinan jarum menunjukkan:
   a. angka 3,
   b. angka prima,
   c. angka ganjil,
   d. angka yang lebih besar dari 4?



jarum penunjuk

8. Seluruh sisi sebuah kubus kayu dengan panjang rusuk 4 cm dicat warna biru. Kubus tersebut dipotong-potong menjadi kubus-kubus kecil dengan panjang rusuk 1 cm. Potongan-potongan tersebut dimasukkan ke dalam kantong. Jika satu kubus diambil secara acak, berapa kemungkinan terambil kubus:
   a. dengan satu sisi berwarna biru;
   b. dengan dua sisi berwarna biru;
   c. dengan tiga sisi berwarna biru;
   d. dengan sisi-sisi tidak terdapat warna biru?

9. Sebuah uang logam lima ratusan dan dadu dilempar bersama-sama.
   a. Carilah ruang sampelnya dengan tabel!
   b. Dengan menggunakan tabel, carilah peluang munculnya pasangan:
      (1) gambar dan mata dadu 3;
      (2) angka dan mata dadu genap!

10. Tiga uang logam lima ratusan dilempar bersama-sama.
    a. Tulislah ruang sampelnya!
    b. Berapa nilai kemungkinan munculnya:
       (1) satu gambar;
       (2) dua gambar dalam urutan sembarang;
       (3) tiga gambar;
       (4) sekurang-kurangnya satu gambar?

11. Ani dan Adi dapat berbelanja ke sebuah toko pada hari Senin sampai Jumat. Carilah besar kemungkinannya:
    a. Ani dan Adi berbelanja pada hari yang sama;
    b. Ani dan Adi berbelanja pada hari yang berurutan!

4.2 Peluang Suatu Kejadian

Sebelum membahas tentang peluang suatu kejadian, kita akan mempelajari terlebih dahulu tentang konsep kejadian sederhana.

4.2.1 Kejadian sederhana

Kejadian sederhana adalah kejadian yang hanya mempunyai satu titik sampel.

Contoh:

1. Kejadian sederhana dari pelemparan sebuah uang logam
   - munculnya angka
   - munculnya gambar
2. Kejadian sederhana dari pelemparan dua uang logam
   - munculnya 2 angka
   - munculnya 2 gambar

4.2.2 Kisaran nilai peluang

Pada bagian terdahulu, telah dibahas tentang nilai kemungkinan suatu kejadian, yaitu:

$$\text{Nilai kemungkinan} = \frac{\text{banyaknya suatu kejadian}}{\text{banyaknya seluruh kejadian yang mungkin terjadi}}$$

Nilai kemungkinan dapat dituliskan dalam bentuk notasi atau rumus:

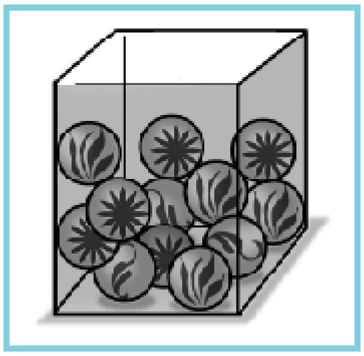
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$P(A)$ = nilai kemungkinan/peluang/probabilitas terjadinya A

$n(A)$ = banyaknya anggota A

$n(S)$ = banyaknya anggota ruang sampel

Dengan menggunakan rumus di atas, kita dapat mengerjakan soal-soal peluang dengan lebih sederhana dan singkat. Berapa kisaran nilai $P(A)$? Untuk mengetahuinya, perhatikan contoh berikut!



Gambar 4.7
12 kelereng dalam satu kotak

Contoh soal 5:

1. Pada percobaan pelemparan 1 dadu, diketahui:

   Ruang sampel = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Jadi, $n(S) = 6$. Sehingga,

   $P(1) = \frac{1}{6}$ $\quad P(\text{ganjil}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

   $P(2) = \frac{1}{6}$ $\quad P(\text{lebih dari } 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

2. Dalam satu kotak, terdapat 3 kelereng biru, 4 kelereng merah, dan 5 kelereng kuning.

   $n(S) = 3 + 4 + 5 = 12$

   A = kejadian terambilnya kelereng biru

   B = kejadian terambilnya kelereng merah

   C = kejadian terambilnya kelereng kuning

   $n(A) = 3$, $n(B) = 4$, dan $n(C) = 5$

   Jika diambil 1 secara acak maka:

   $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

   $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

   $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{5}{12}$

   $P(B \text{ atau } A) = \frac{7}{12}$

   $P(\text{bukan } C) = \frac{7}{12}$

   $P(A \text{ atau } B \text{ atau } C) = \frac{12}{12} = 1$

   $P(\text{terambilnya kelereng putih}) = \frac{0}{12} = 0$

INFO MATEMATIKA

Probabilitas adalah suatu cara ahli matematika menggambarkan kemungkinan bahwa suatu peristiwa akan terjadi. Teori ini dipergunakan untuk meramalkan hasil dari suatu percobaan bila hasil ini ditentukan oleh hukum kemungkinan.

Teori probabilitas memungkinkan kita menentukan karakteristik kemungkinan suatu sampel yang diambil dari suatu populasi, yang karakteristiknya diketahui. Teori tersebut juga memberikan dasar bagi bagian dari pengetahuan yang erat hubungannya dengan ilmu statistik.

Sumber: Ilmu Pengetahuan Populer 2

Dari contoh 4 nomor 2, dapat dilihat bahwa:

1. $P(B \text{ atau } A) = \frac{7}{12}$;

   $P(B) + P(A) = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$
2. $P(C) + P(\text{bukan } C) = \frac{5}{12} + \frac{7}{12} = \frac{12}{12} = 1$
3. $P(A \text{ atau } B \text{ atau } C) = 1$
4. $P(\text{terambilnya kelereng putih}) = 0$, mustahil terjadi karena tidak ada kelereng berwarna putih.

Dari hal-hal tersebut, dapat disimpulkan sebagai berikut.

1. $P(A) + P(\text{bukan } A) = 1$.
2. $P(A) = 1$ adalah kejadian yang pasti.
3. $P(A) = 0$ adalah kejadian yang tidak mungkin terjadi atau mustahil
4. Nilai $P(A)$ antara 0 dan 1 atau $0 < P(A) < 1$ adalah kejadian yang mungkin terjadi.
5. Nilai berkisar dari 0 sampai dengan 1 atau $0 \le P(A) \le 1$.

Diskusi

Salinlah pada buku tugasmu dan isilah tabel berikut dengan tanda (√) pada kolom yang tersedia untuk menyatakan uraian kejadian di bawah ini merupakan kepastian, kemustahilan, atau bukan kepastian dan bukan kemustahilan!

	Uraian Kejadian	Kepastian	Kemustahilan	Mungkin terjadi
1	Besok matahari akan terbit			
2	Sebuah segitiga tumpul mempunyai dua sudut tumpul			
3	Tiga hari lagi akan hujan			
4	Sebuah kubus mempunyai 6 buah sisi			
5	Suatu hari manusia akan meninggal dunia			
6	Jumlah dua bilangan ganjil merupakan bilangan ganjil			
7	Bila sebuah dadu dilempar akan muncul mata dadu 7			
8	Orang yang digigit nyamuk akan terserang demam berdarah			
9	Semua bilangan prima pasti ganjil			
10	Jika dua mata uang logam dilempar akan muncul gambar dan angka			

LATIHAN 3

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

1. Pada percobaan pelemparan sebuah dadu, tentukan nilai berikut!
   a. $P(3)$
   b. $P(5)$
   c. $P(3 \text{ atau } 5)$
   d. $P(3 \text{ dan } 5)$
   e. $P(\text{prima})$
   f. $P(\text{bukan prima})$
   g. $P(7)$
2. Dadu berwarna merah dan biru dilempar bersama-sama. Buatlah daftar ruang sampelnya! Dengan menggunakan tabel, carilah nilai berikut!
   a. $P(3)$, yaitu jumlah kedua mata dadu 3
   b. $P(5)$
   c. $P(8)$
   d. $P(\text{lebih dari } 9)$
   e. $P(4 \text{ atau } 6)$
   f. $P(2 \text{ dadu merah})$
   g. $P(3 \text{ dadu biru})$
3. Sebuah pusingan yang bernomor 1, 2, 3, dan 4 diputar dua kali. Carilah nilai berikut!
   a. $P(\text{keduanya bernomor sama})$
   b. $P(\text{berjumlah } 5)$
   c. $P(\text{berjumlah } 2 \text{ atau } 4)$
   d. $P(2 \text{ pada putaran pertama})$
   e. $P(4 \text{ pada putaran kedua})$
4. Pada percobaan pelemparan empat mata uang logam, carilah:
   a. $P(4 \text{ gambar})$;
   b. $P(2 \text{ gambar dan } 2 \text{ angka dalam urutan sembarang})$;
   c. $P(3 \text{ gambar dan } 1 \text{ angka dalam urutan sembarang})$;
   d. $P(\text{sekurang-kurangnya } 2 \text{ angka})$!
5. Peluang bayi meninggal pada saat lahir di suatu negara adalah 0,13. Berapa peluang bayi hidup pada saat lahir di negara tersebut?
6. Dari seperangkat kartu *bridge*, diambil kartu-kartu bernomor 2 sampai 10 saja. Jika diambil satu secara acak, tentukan nilai berikut!
   a. $P(\text{daun})$
   b. $P(\text{bernomor } 4)$
   c. $P(\text{hati bernomor genap})$
   d. $P(\text{bukan bernomor } 4)$
   e. $P(\text{bernomor } 5)$ pada pengambilan kedua jika muncul 4 pada pengambilan pertama dan tidak dikembalikan lagi
7. Sebuah lempengan berbentuk lingkaran, terbagi atas 12 juring yang sama luasnya. Dari juring-juring tersebut, 4 juring diberi warna merah, 3 juring berwarna hijau, dan sisanya berwarna kuning. Pada lempengan diberi jarum penunjuk. Jika lempengan diputar satu kali, tentukan nilai berikut!
   a. $P(\text{merah})$
   b. $P(\text{kuning})$
   c. $P(\text{bukan kuning})$
   d. $P(\text{biru})$
   e. $P(\text{merah, kuning, atau hijau})$

4.2.3 Dua kejadian majemuk

A. Kejadian saling asing (saling lepas)

Berikut ini, terdapat tabel hasil pelemparan dua dadu secara bersama-sama atau pelemparan sebuah dadu yang dilakukan dua kali.

Tabel 4.2

Dadu kedua

Dadu pertama	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Gambar 4.9 (a)
Dua buah dadu

Misalkan A adalah kejadian munculnya kedua mata dadu berjumlah 4 dan B adalah kejadian munculnya jumlah kedua mata dadu 8. Himpunan hasil dari kejadian-kejadian tersebut adalah $A = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$ dan $B = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$.

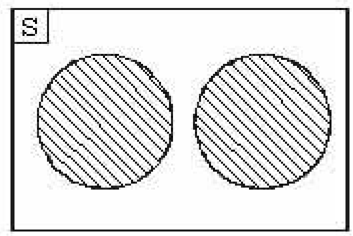
Terlihat bahwa antara himpunan kejadian A dan kejadian B tidak terdapat anggota yang sama (lihat tabel 4.2!). Dalam matematika, kejadian A dan kejadian B disebut *kejadian saling lepas* atau *saling asing*. Jadi, dua kejadian dikatakan saling lepas atau saling asing jika satu kejadian terjadi dan kejadian yang lain tidak mungkin terjadi secara bersamaan (tidak terpengaruh).

Untuk mencari nilai peluang munculnya kejadian A atau kejadian B, kita tinggal menjumlahkan kedua hasil tersebut.

A dan B kejadian saling asing/ saling lepas.

Pada contoh di atas, $P(A) = \frac{3}{36}$ dan $P(B) = \frac{5}{36}$. Maka,

$$P(A \text{ atau } B) = \frac{3}{36} + \frac{5}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}.$$



Gambar 4.9 (b)
Dua kejadian saling lepas

B. Kejadian saling bebas

Berikut ini, terdapat tabel hasil pelemparan dua dadu secara bersama-sama atau pelemparan sebuah dadu yang dilakukan dua kali.

Tabel 4.3

Dadu kedua

Dadu pertama	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Misalkan dari percobaan pelemparan dua dadu secara bersamaan muncul kejadian A, yaitu jumlah mata dadu 7, dan kejadian B, yaitu muncul mata dadu 5 pada dadu pertama. Himpunan hasil dari kejadian-kejadian tersebut adalah $A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$ dan $B = \{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\}$ (lihat tabel 4.2).

Terlihat bahwa antara kejadian A dan kejadian B ada anggota yang sama, yaitu $(5,2)$. Dalam matematika, kejadian A dan kejadian B dikatakan *saling bebas*. Artinya, kejadian A terjadi tidak berpengaruh dan tidak dipengaruhi oleh terjadi atau tidaknya kejadian B.

Peluang munculnya kejadian A dan B dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\boxed{P(A \text{ dan } B) = P(A) \times P(B)} \qquad A \text{ dan } B \text{ saling bebas.}$$

Peluang munculnya kejadian A atau B dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\boxed{P(A \text{ atau } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ dan } B)}$$

Oleh karena $P(A) = \frac{6}{36}$ dan $P(B) = \frac{6}{36}$, maka

- $P(A \text{ dan } B) = \frac{6}{36} \times \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$
- $P(A \text{ atau } B) = \frac{6}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$

Jadi, dua kejadian dikatakan saling bebas.

LATIHAN 4

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

1. Dilakukan percobaan melempar satu uang logam dan satu dadu secara bersamaan.
   a. Buatlah tabel hasil percobaan tersebut!
   b. Tentukan:
      (1) himpunan munculnya angka (A) pada uang logam;
      (2) himpunan munculnya sisi dadu bermata 3;
      (3) himpunan munculnya sisi dadu bermata 5;
      (4) himpunan munculnya angka pada uang logam atau sisi dadu bermata 3;
      (5) himpunan munculnya angka pada uang logam dan sisi dadu bermata 5;
      (6) peluang munculnya sisi dadu bermata 3 atau 5!
2. Dilakukan percobaan memutar pusingan bernomor 1, 2, 3, dan 4 dua kali berturut-turut.
   a. Buatlah tabel hasil percobaan tersebut!
   b. Tentukan nilai peluang berikut!
      (1) $P(5)$
      (2) $P(7)$
      (3) $P(5 \text{ atau } 7)$
      (4) P (1 pada putaran pertama

dan 3 pada putaran kedua)

(5) P(1 pada putaran pertama atau 3 pada putaran kedua)

(6) P(2 pada putaran pertama atau 4 pada putaran kedua)

3. Dilakukan percobaan melempar dua dadu secara bersamaan. Tentukan nilai peluang berikut!
   a. P(10)
   b. P(6 atau 9)
   c. P(3 atau 7 atau 11)
   d. P(2 pada dadu pertama atau 5 pada dadu pertama)
   e. P(2 pada dadu pertama atau 6 pada dadu kedua)
   f. P(4 pada dadu pertama dan 1 pada dadu kedua)
   g. P(bilangan prima pada dadu pertama dan 4 pada dadu kedua)
   h. P(bilangan prima pada dadu pertama atau 4 pada dadu kedua)
   i. P(bilangan ganjil pada dadu pertama dan bilangan genap pada dadu kedua)
   j. P(bilangan ganjil pada dadu pertama dan bilangan genap pada dadu kedua)
4. Dilakukan percobaan memutar pusingan bernomor 1, 2, 3, ..., 10 dan melempar sebuah dadu secara bersamaan. Tentukan nilai peluang berikut!
   a. P(12)
   b. P(8 dan 11)
   c. P(bernomor dan sisi mata dadu sama)
   d. P(10 pada pusingan dan 6 pada dadu)
   e. P(9 pada pusingan atau 5 pada dadu)
   f. P(lebih dari 7 pada pusingan dan 3 pada dadu)
   g. P(kurang dari 5 pada pusingan atau 1 pada dadu)
5. Sebuah lempengan berbentuk lingkaran, terbagi atas 10 juring yang sama luasnya. Dari juring-juring tersebut, 2 juring diberi warna putih, 3 juring berwarna hijau, dan sisanya merah. Jika lempengan diberi jarum penunjuk dan diputar dua kali berturut-turut, tentukan:
   a. P(hijau pada putaran I dan merah pada putaran II)
   b. P(hijau pada putaran I atau merah pada putaran II)
   c. P(berwarna sama);
   d. P(berwarna berbeda)!
6. Kemungkinan seorang laki-laki hidup sampai 70 tahun adalah 0,4 sedangkan wanita 0,5. Tentukan:
   a. kemungkinan keduanya hidup sampai 70 tahun;
   b. kemungkinan seorang laki-laki atau perempuan hidup sampai 70 tahun!

4.2.4 Frekuensi harapan (pengayaan)

Pada suatu percobaan, apabila dilakukan berkali-kali maka harapan untuk memperoleh suatu hasil menjadi semakin besar. Dalam undian berhadiah, apabila hadiah yang diberikan banyak maka pengambilan kupon undian juga semakin banyak, sehingga harapan untuk memperoleh hadiah semakin besar. Jika mengharapkan mata dadu tertentu muncul dari suatu pelemparan maka semakin sering kita melakukan pelemparan, semakin besar harapan untuk memperoleh mata dadu tersebut.

Kedua contoh tersebut, dalam matematika, disebut *frekuensi harapan*. Frekuensi harapan diperoleh dengan cara mengalikan nilai kemungkinan suatu kejadian dengan banyaknya percobaan.

Jika frekuensi harapan dilambangkan dengan Fh maka:

Gambar 4.8

Pelemparan dua mata uang logam

$$\boxed{Fh(A) = P(A) \times \text{banyaknya percobaan}}$$

di mana: $Fh(A)$ = frekuensi harapan terjadinya kejadian A

$P(A)$ = peluang terjadinya kejadian A

Contoh soal 6:

1. Pada percobaan pelemparan dua mata uang logam, diketahui $n(S) = 4$, $P(2 \text{ gambar}) = \frac{1}{4}$.

   Frekuensi harapan munculnya 2 gambar dari 100 kali pelemparan adalah:

   $$\begin{aligned} Fh(2 \text{ gambar}) &= P(2 \text{ gambar}) \times 100 \text{ kali} \\ &= \frac{1}{4} \times 100 \text{ kali} \\ &= 25 \text{ kali} \end{aligned}$$

2. Kemungkinan seseorang tertular penyakit cacar adalah 0,3. Jika dalam suatu daerah terdapat 400 orang maka kemungkinan banyaknya orang yang tertular cacar adalah:

   $$\begin{aligned} Fh(\text{cacar}) &= 0{,}3 \times 400 \text{ orang} \\ &= 120 \text{ orang} \end{aligned}$$

LATIHAN 5

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

1. Sebuah dadu dilempar 240 kali. Tentukanlah frekuensi harapan:
   a. munculnya mata dadu 3;
   b. munculnya mata dadu genap;
   c. munculnya mata dadu 3 atau 4;
   d. munculnya mata dadu kurang dari 5!
2. Sebuah mata uang logam dilempar 100 kali. Hitunglah frekuensi harapan munculnya:
   a. gambar,
   b. gambar atau angka!
3. Dalam sebuah kantong berisi 12 kelereng biru dan 3 kelereng merah. Dilakukan pengambilan kelereng secara acak sebanyak 10 kali (setiap kali mengambil dikembalikan lagi). Hitunglah frekuensi harapan terambilnya kelereng merah!
4. Pada pelemparan tiga mata uang logam bersama-sama sebanyak 40 kali, tentukan frekuensi harapan:
   a. munculnya tiga gambar;
   b. munculnya dua angka (urutan tidak diperhatikan)!

5. Dua buah dadu dilempar secara bersamaan sebanyak 60 kali. Tentukan frekuensi harapan munculnya:
   a. mata dadu berjumlah 5;
   b. mata dadu berjumlah 7!
6. Seperangkat kartu *bridge* dikocok dan diambil satu kartu secara acak. Kartu tersebut dikembalikan, kemudian diteruskan sampai 104 kali. Tentukan frekuensi harapan terambilnya:
   a. kartu As,
   b. kartu As hati!
7. Sebuah piringan yang mempunyai nomor 1 sampai 10 diputar 50 kali. Tentukan frekuensi harapan munculnya nomor:
   a. 10,
   b. prima!

RANGKUMAN

- Nilai kemungkinan suatu kejadian:

  $$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

  $P(A)$ = nilai kemungkinan/peluang/probabilitas terjadinya A

  $n(A)$ = banyaknya anggota A

  $n(S)$ = banyaknya anggota ruang sampel

- Kisaran nilai peluang
  a. $P(A) = 1$, adalah kejadian pasti
  b. $P(A) = 0$, adalah kejadian mustahil
  c. $P(A) + P(\text{bukan } A) = 1$
  d. Nilai $P(A)$: $0 \le P(A) \le 1$ terjadinya A

- Frekuensi harapan

  $$Fh(A) = P(A) \times \text{banyaknya percobaan}$$

- Dua kejadian majemuk
  a. Kejadian saling lepas (saling asing)

  Jika satu kejadian terjadi dan kejadian yang lain tidak mungkin terjadi secara bersamaan (tidak terpengaruh) maka dikatakan kejadian saling asing.

  $P(A \text{ atau } B) = P(A) + P(B)$; A dan B saling asing

  b. Kejadian saling bebas

  Jika suatu kejadian terjadi tidak berpengaruh dan tidak dipengaruhi oleh terjadi atau tidaknya kejadian yang lain maka dikatakan kejadian saling bebas.

  $P(A \text{ dan } B) = P(A) \times P(B)$; A dan B saling bebas

  $$P(A \text{ atau } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ dan } B)$$

EVALUASI

I. Pemahaman Konsep

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini!

1. Suatu pusingan terbagi atas 12 juring yang sama luasnya. 3 juring diberi warna merah, 4 juring diberi warna kuning, dan 5 juring diberi warna hijau. Jika pusingan diputar, tentukan nilai peluang berikut!
   a. P (merah) b. P (kuning)
   c. P (hijau) d. P (bukan merah)
   e. Fh (kuning untuk 600 putaran)
2. Sebuah lampu senter membutuhkan 2 batu baterai yang dipasang secara seri. Jika baterai dipasang secara sembarang, berapa besar nilai kemungkinan:
   a. lampu menyala;
   b. lampu tidak menyala?
3. Suatu huruf diambil secara acak dari susunan huruf SAYA KELAS DUA. Tentukan nilai peluang kejadian berikut!
   a. P (S) b. P (A)
   c. P (U)

II. Penalaran dan Komunikasi

Selesaikanlah soal-soal di bawah ini!

1. Sebuah pusingan bernomor 1, 2, 3, dan 4 diputar. Kemudian, sebuah dadu dilemparkan. Buatlah tabelnya dan carilah nilai peluang berikut!
   a. P (5)
   b. P (8)
   c. P (3 pada pusingan)
   d. P (6 pada dadu)
   e. P (4 atau 6)
   f. P (3 pada pusingan dan 6 pada dadu)
   g. P (3 pada pusingan atau 6 pada dadu)
2. Seseorang mengambil sebuah kartu dari seperangkat kartu *bridge*. Carilah:
   a. P (4 merah) ;
   b. P (As atau K) ;
   c. P (ganjil bergambar daun) ;
   d. Fh (5 hati untuk 2.600 pengambilan) !
3. Sebuah kubus dengan panjang rusuk 5 cm dicat merah pada seluruh bidang sisinya. Kemudian, kubus tersebut dipotong menjadi kubus kecil-kecil dengan panjang rusuk 1 cm. Jika diambil satu kubus kecil secara acak, tentukan:
   a. P (3 sisi bercat merah) ;
   b. P (2 sisi bercat merah) ;
   c. P (1 sisi bercat merah) ;
   d. P (tanpa sisi merah) !

III. Pemecahan Masalah

Selesaikanlah soal-soal di bawah ini!

1. Suatu arisan uang diikuti oleh 12 peserta. Setiap kali diundi, hanya 1 peserta yang memperoleh uang arisan. Tentukan peluang seorang peserta memperoleh uang arisan:
   a. pada penarikan pertama;
   b. pada penarikan kedua;
   c. pada penarikan kedua belas!
2. Sebuah keluarga memiliki 2 anak laki-laki dan 3 anak perempuan. Pada suatu hari, kedua orang tua anak-anak tersebut ingin pergi jalan-jalan.
   a. Jika seorang anak saja yang diajak pergi, berapa peluang yang ikut:
      (i) anak laki-laki;
      (ii) anak perempuan?
   b. Jika yang diajak pergi dua orang anak, berapa peluang yang ikut:
      (i) keduanya anak laki-laki;
      (ii) satu laki-laki dan satu perempuan?
3. Dalam sebuah kotak terdapat 6 bola merah, 4 bola kuning, dan 3 bola hijau. Diambil 2 bola secara acak dan diulang sebanyak 600 kali. Tentukan frekuensi harapan:
   a. keduanya bola merah;
   b. keduanya bola kuning;
   c. satu bola kuning dan satu bola hijau!

Bab 5

Bilangan Berpangkat

Gambar 5.1
Komet Ikeya-Seki yang terlihat pada akhir tahun 1965
Sumber: Ilmu Pengetahuan Populer Jilid 1

Coba kamu perhatikan gambar di atas! Gambar di atas adalah gambar salah satu komet yang dapat kita lihat. Itu adalah komet Ikeya-Seki yang dapat terlihat pada akhir tahun 1965, merupakan komet pertama yang telah diukur suhunya. Teknik berinframerah menunjukkan bahwa ketika berada 32×10^6 km dari matahari, suhunya $650°C$.

Ilustrasi di atas adalah salah satu contoh penggambaran bentuk bilangan berpangkat yang dapat kita gunakan untuk mempermudah penulisan bilangan yang besar.

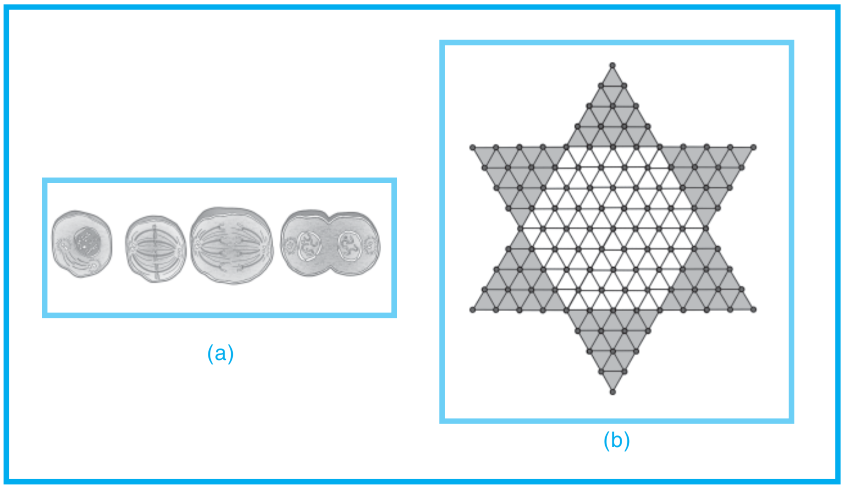
Salah satu ahli matematika berkebangsaan Perancis yang pertama kali memperkenalkan cara menuliskan perkalian berulang dengan menggunakan notasi bilangan berpangkat atau notasi eksponen adalah **Rene Descartes** (1596 - 1650).

Pada bab kelima ini, kita akan membahas tentang bilangan berpangkat. Materi yang akan kita pelajari antara lain sifat-sifat bilangan berpangkat dan bentuk akar, operasi aljabar pada bilangan berpangkat dan bentuk akar, serta penerapan bilangan berpangkat dan bentuk akar.

Diskusi Pembuka

1. Apa yang kamu ketahui tentang sifat-sifat bilangan berpangkat?
2. Apa yang kamu ketahui tentang sifat-sifat bentuk akar?
3. Operasi aljabar apa saja yang terdapat pada bilangan berpangkat dan bentuk akar?
4. Apa saja penerapan yang menggunakan atau melibatkan bilangan berpangkat dan bentuk akar?

Bab 6
Barisan dan Deret Bilangan



(a) (b)

Gambar 6.1

(a) Pembelahan sel tubuh (mitosis)

(b) Papan halma

Jumlah penduduk Indonesia setiap tahunnya bertambah sesuai dengan jumlah kelahiran dan kematian yang terjadi.

Pembelahan sel tubuh (mitosis) seperti terlihat pada gambar 6.1(a) memiliki pola yang teratur. Mula-mula, satu sel membelah menjadi dua sel. Dari dua sel membelah menjadi empat sel. Dari empat sel menjadi delapan sel, dan seterusnya.

Banyak cabang setiap tingkat pada akar rumput dan tanduk menjangan memiliki pola yang teratur. Bentuk spiral cangkang keong atau siput memiliki bentuk yang teratur.

Pada permainan halma pada gambar 6.2(b), buah-buahan halma yang digunakan dapat berjumlah 6, 10, atau 15. Buah-buahan halma ditempatkan pada titik-titik potong papan halma yang berbentuk pola segitiga.

Di dalam matematika, beberapa contoh kejadian di atas berhubungan erat dengan pola bilangan dan barisan bilangan.

Pada bab keenam ini, kita akan membahas tentang barisan dan deret bilangan. Materi yang akan kita pelajari antara lain pola bilangan, barisan bilangan, dan deret bilangan.

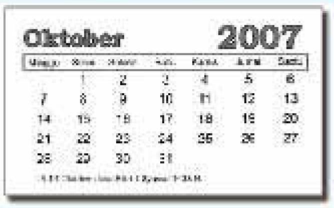
Diskusi Pembuka

1. Apa yang kamu ketahui tentyang pola bilangan?
2. Dapatkah kamu memberikan contoh pola bilangan
3. Apa yang kamu ketahui tentang barisan dan deret?
4. Dapatkah kamu memberikan contoh barisan dan deret bilangan?
5. Bagaimana kamu menentukan suku ke-*n* suatu barisan aritmetika dan geometri?
6. Dapatkah kamu menentukan jumlah *n* suku pertama deret aritmetika dan geometri?

6.1 Pola Barisan Bilangan

6.1.1 Pola bilangan

Coba kamu perhatikan kalender di bawah ini!



Pola bilangan apa yang dapat kamu temukan dalam suatu baris atau suatu kolom?

Pada buku jilid 1, kita telah mempelajari jenis-jenis himpunan bilangan yang dapat diturunkan dari himpunan bilangan cacah. Himpunan-himpunan bilangan tersebut antara lain sebagai berikut.

Himpunan bilangan asli $= \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$.

Himpunan bilangan genap $= \{0, 2, 4, 6, 8, ...\}$.

Himpunan bilangan ganjil $= \{1, 3, 5, 7, 9, ...\}$.

Himpunan bilangan kuadrat $= \{0, 1, 4, 9, 16, ...\}$.

Himpunan bilangan berpangkat tiga $= \{0, 1, 8, 27, 64, ...\}$.

Perhatikan kembali himpunan-himpunan bilangan di atas! Bilangan-bilangan yang menjadi anggota dari himpunan-himpunan tersebut membentuk pola bilangan, karena mempunyai aturan tertentu. Berikut adalah pola bilangan beserta aturan yang membentuknya.

(i) 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...

Aturan: menambahkan dengan 2 untuk urutan bilangan berikutnya atau pola bilangan genap atau pola bilangan kelipatan 2.

(ii) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...

Aturan: menambahkan dengan 2 untuk urutan bilangan berikutnya atau pola bilangan ganjil.

(iii) 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, ...

Aturan: menambahkan dengan 4 untuk urutan bilangan berikutnya.

(iv) 100, 95, 90, 85, 80, 75, ...

Aturan: mengurangkan dengan 5 untuk urutan bilangan berikutnya.

(v) 3, 6, 12, 24, 48, 96, ...

Aturan: mengalikan dengan 2 untuk urutan bilangan berikutnya.

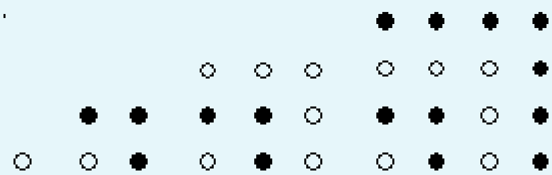
(vi) 1, 3, 7, 13, 21, 31, ...

Aturan: menambahkan dengan urutan bilangan genap mulai dari 2 untuk urutan bilangan berikutnya.

LATIHAN 1

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

1.

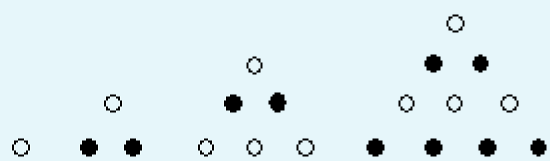


a. Lanjutkan pola di atas dengan dua gambar lagi!

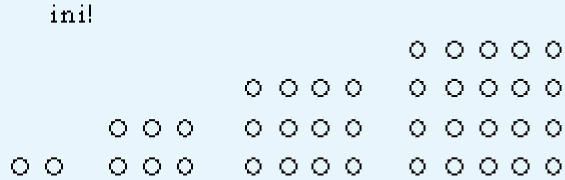
b. Tulislah jumlah noktahnya dan tulislah pula aturannya!

Pola di atas disebut *pola bilangan persegi*.

2. Ulangi perintah seperti nomor 1 untuk *pola bilangan segitiga* di bawah ini!



3. Ulangi perintah seperti nomor 1 untuk *pola bilangan persegi panjang* di bawah ini!



4. Perhatikan pola bilangan berikut!

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

a. Lanjutkan pola di atas sebanyak tiga baris lagi dan jelaskan cara memperolehnya!

b. Tulislah jumlah bilangan untuk setiap barisnya!

c. Tanpa menggambar, lanjutkan dengan tiga bilangan lagi dan jelaskan aturannya!

Pola bilangan di atas merupakan *pola bilangan segitiga pascal*.

5. Lanjutkan pola bilangan di bawah ini sebanyak tiga bilangan lagi, kemudian tuliskan aturannya!

a. 2, 6, 10, 14, 18, ...

b. $5, 6\frac{1}{2}, 8, 9\frac{1}{2}, 11, \ldots$

c. 200, 191, 182, 173, 164, ...

d. 1, 2, 5, 10, 17, 26, ...

e. 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, ...

f. 1, 3, 9, 27, 81, ...

g. 2, 8, 32, 128, 512, ...

h. 1, 2, 6, 24, 120, ...

6.1.2 Barisan bilangan

Barisan bilangan adalah urutan bilangan yang dibuat dengan suatu aturan tertentu. Bilangan-bilangan yang menyusun barisan disebut *suku*.

Contoh:

(i) 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

Aturan: menambahkan dengan 1 atau urutan bilangan cacah.

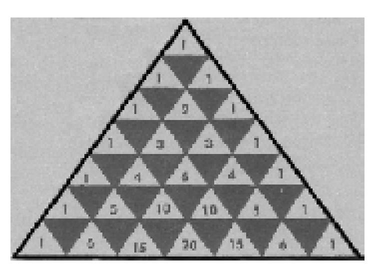
Suku ke-1 adalah 0, ditulis $U_1 = 0$

Suku ke-2 adalah 1, ditulis $U_2 = 1$

Suku ke-3 adalah 2, ditulis $U_3 = 2$

Suku ke-4 adalah 3, ditulis $U_4 = 3$, dan seterusnya.

Blaise Pascal adalah nama seorang ahli matematika bangsa Prancis yang hidup pada tahun 1621 - 1662. Namanya terkenal karena dia telah menemukan diagram rasio yang dikenal dengan " Segitiga Pascal". Bentuk segitiga Pascal seperti digambarkan di bawah ini.



Gambar 6.2

Segitiga Pascal

Contoh lain dari barisan bilangan adalah barisan Fibonacci.

Perhatikan barisan di bawah ini!

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Dari barisan di atas kita dapat melihat bahwa setiap suku setelah suku kedua adalah jumlah dari dua suku pertama yang mendahuluinya. Barisan di atas di sebut barisan Fibonacci, yaitu barisan yang tiap sukunya kecuali suku pertama dan suku kedua adalah jumlah dari dua suku pertama yang mendahuluinya.

Cobalah kalian cari barisan Fibonacci yang lain!

(ii) 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...

Aturan: menambahkan dengan 2 atau urutan bilangan genap.

$U_1 = 0$, $U_2 = 2$, $U_3 = 4$, $U_4 = 6$, $U_5 = 8$, dan seterusnya.

(iii) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...

Aturan: menambahkan dengan 2 atau urutan bilangan ganjil.

$U_1 = 1$, $U_2 = 3$, $U_3 = 5$, $U_4 = 7$, $U_5 = 9$, dan seterusnya.

(iv) 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...

Aturan: mengalikan dengan 2.

$U_1 = 1$, $U_2 = 2$, $U_3 = 4$, $U_4 = 8$, $U_5 = 16$, dan seterusnya.

(v) 2, 6, 18, 54, 162, 486, ...

Aturan: mengalikan dengan 3.

$U_1 = 2$, $U_2 = 6$, $U_3 = 18$, $U_4 = 54$, $U_5 = 162$, dan seterusnya.

LATIHAN 2

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

1. Dari barisan-barisan bilangan di bawah ini, tulislah aturannya dan tentukan suku ke-10!
   a. 21, 22, 23, 24, 25, ...
   b. 0, 2, 4, 6, 8, 10, ...
   c. 32, 34, 46, 38, 40, ...
   d. 1, 4, 7, 10, 13, 16, ...
   e. 13, 16, 19, 22, 25, ...
   f. 0, 4, 8, 12, 16, 20, ...
   g. 5, 9, 13, 17, 21, 25, ...
   h. 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...
   i. 3, 9, 27, 81, 243, ...
   j. 0, 1, 4, 9, 16, 25, ...

2. Tentukan suku ke-6, suku ke-10, dan suku ke-20 dari barisan-barisan bilangan di bawah ini!
   a. 1 + 2, 2 + 3, 3 + 4, ...
   b. $2 \times 3, 3 \times 4, 4 \times 5, \ldots$
   c. 1 + 2 + 3, 2 + 3 + 4, 3 + 4 + 5, ...
   d. 11, 21, 31, ...
   e. 109, 208, 307, ...
   f. 100, 99, 98, ...
   g. 100, 98, 96, ...
   h. 1.000, 997, 994, ...
   i. 1.000, 995, 990, ...
   j. 5.000, 4.975, 4.950, ...

6.2 Suku ke-*n* Barisan Aritmetika dan Geometri

Pada subbab ini, kita akan mempelajari bagaimana menentukan suku ke-n barisan aritmetika dan barisan geometri.

6.2.1 Menentukan suku ke-*n* barisan aritmetika

A. Menentukan suku ke-*n* dengan pola

Barisan bilangan dapat diteruskan sampai takterhingga. Untuk menentukan suku tertentu dari suatu barisan bilangan, diperlukan pola tertentu yang dapat memudahkan pencariannya. Pola tertentu tersebut merupakan rumus aljabar yang menghubungkan barisan bilangan yang diketahui dengan barisan bilangan asli.

Di bawah ini diberikan beberapa contoh cara menentukan urutan tertentu dengan rumus aljabar.

Contoh:

1. Bilangan asli 1 2 3 4 5 6 ... n

   Barisan ganjil $\underbrace{1 \quad 3}_{+2}\ \underbrace{\quad 5}_{+2}\ \underbrace{\quad 7}_{+2}\ \underbrace{\quad 9}_{+2}\ \underbrace{\quad 11}_{+2}$ ... $U_n = \ldots\ ?$

   Aturan barisan bilangan ganjil adalah menambahkan dengan 2 untuk setiap suku berikutnya.

$$
\begin{aligned}
U_1 &= 1 = (2 \times 1) - 1\\
U_2 &= 3 = (2 \times 2) - 1\\
U_3 &= 5 = (2 \times 3) - 1\\
U_4 &= 7 = (2 \times 4) - 1\\
U_5 &= 9 = (2 \times 5) - 1\\
U_6 &= 11 = (2 \times 6) - 1\\
&\vdots\\
U_n &= 2n - 1
\end{aligned}
$$

2. Bilangan asli 1 2 3 4 5 6 ... n

   Barisan bilangan $\underbrace{6 \quad 10}_{+4}\ \underbrace{\quad 14}_{+4}\ \underbrace{\quad 18}_{+4}\ \underbrace{\quad 22}_{+4}\ \underbrace{\quad 26}_{+4}$ ... $U_n = \ldots\ ?$

   Aturan barisan bilangan tersebut adalah menambahkan dengan 4 untuk setiap suku berikutnya.

$$
\begin{aligned}
U_1 &= 6 = (4 \times 1) + 2\\
U_2 &= 10 = (4 \times 2) + 2\\
U_3 &= 14 = (4 \times 3) + 2\\
U_4 &= 18 = (4 \times 4) + 2\\
U_5 &= 22 = (4 \times 5) + 2
\end{aligned}
$$

INFO MATEMATIKA

Banyak peristiwa yang terjadi berulang kalidalam urutan yang teratur. Contohnya matahari terbit setiap hari, planet berputar dalam orbitnya mengelilingi matahari sehingga ahli astronomi dapat menghitung kedudukannya bertahun-tahun sebelumnya. Orang telah menganalisis peristiwa berkala dengan menggunakan deret.

Hasil dari analisis kadang-kadang dipergunakan untuk meramalkan peristiwa di masa yang akan datang.

Sumber: Ilmu Pengetahuan Populer 2

$U_6 = 26 = (4 \times 6) + 2$

.
.
.

$U_n = 4n + 2$

3. Bilangan asli 1 2 3 4 5 6 ... n

 Barisan bilangan 100 95 90 85 80 75 ... $U_n = \ldots ?$

 $-5 \quad -5 \quad -5 \quad -5 \quad -5$

 Aturan barisan bilangan di atas adalah mengurangi dengan 5 untuk setiap suku berikutnya.

 $U_1 = 100 = 105 - (5 \times 1)$

 $U_2 = 95 = 105 - (5 \times 2)$

 $U_3 = 90 = 105 - (5 \times 3)$

 $U_4 = 85 = 105 - (5 \times 4)$

 $U_1 = 80 = 105 - (5 \times 5)$

 $U_2 = 75 = 105 - (5 \times 6)$

 .
 .
 .

 $U_n = 105 - 5n$

Dari ketiga contoh tersebut, terlihat bahwa suku-suku berurutan pada setiap barisan bilangan mempunyai selisih atau beda yang tetap. Barisan bilangan seperti itu disebut *Barisan Aritmetika (BA)*.

Jika nilai suku-sukunya makin lama makin besar, maka disebut *Barisan Aritmetika Naik* dan jika nilai suku-sukunya makin lama makin kecil, maka disebut *Barisan Aritmetika Turun*.

LATIHAN 3

Tentukan suku ke-*n* dari barisan bilangan di bawah ini dan kerjakanlah pada buku tugasmu!

1. 2, 4, 6, 8, 10, ...
2. 5, 7, 9, 11, 13, ...
3. 1, 4, 7, 10, 13, ...
4. 2, 6, 10, 14, 18, ...
5. 11, 16, 21, 26, 31, ...
6. 200, 197, 194, 191, 188, ...
7. 1000, 991, 982, 973, 964, ...
8. 450, 444, 438, 432, 426, ...
9. $100, 97\frac{1}{2}, 95, 92\frac{1}{2}, 90, \ldots$
10. $1 + 2, 2 + 3, 3 + 4, 4 + 5, 5 + 6, \ldots$

B. Menentukan suku ke-*n* dengan rumus

Selain menggunakan pola hubungan barisan bilangan dengan bilangan asli, suku ke-n suatu barisan bilangan juga dapat dicari dengan menggunakan rumus.

☛ Barisan aritmetika

$U_1, \quad U_2, \quad U_3, \quad U_4, \quad U_5, \quad \ldots, \quad U_n$

$+b \quad +b \quad +b \quad +b$

Selisih atau beda tiap suku dimisalkan b dan suku pertama dimisalkan a

$$U_1 = a = a + (0 \times b)$$
$$U_2 = a + b = a + (1 \times b)$$
$$U_3 = a + b + b = a + (2 \times b)$$
$$U_4 = a + b + b + b = a + (3 \times b)$$
$$U_5 = a + b + b + b + b = a + (4 \times b)$$
$$\vdots$$
$$U_n = a + \underbrace{b + b + b + \ldots + b}_{(n-1)\ suku} = a + (n-1)b$$

Jadi, untuk menentukan suku ke-n (U_n) dari barisan aritmetika digunakan rumus:

$$\boxed{U_n = a + (n-1)b}$$

di mana: $a = U_1$ dan $b = U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = U_4 - U_3 = \ldots$

Rumus suku ke-n barisan aritmetika:

$$U_n = a + (n-1)b$$
$$\Leftrightarrow U_n = a + nb - b$$
$$\Leftrightarrow U_n = a - b + nb$$
$$\Leftrightarrow U_n = nb + (a - b)$$

Jadi, U_n adalah persamaan linear dalam variabel n.

Contoh soal 1:

Ditentukan BA: 2, 5, 8, 11, 14, ...

Tentukan rumus suku ke-n dan nilai suku ke-100!

Jawab:

Diketahui: $a = 2$ dan $b = 5 - 2 = 3$, maka:

$$\begin{aligned} U_n &= a + (n-1)b \\ &= 2 + (n-1)3 \\ &= 2 + 3n - 3 \\ &= 3n - 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} U_{100} &= 3 \times 100 - 1 \\ &= 300 - 1 \\ &= 299 \end{aligned}$$

Jadi, $U_n = 3n - 1$ dan $U_{100} = 299$.

Contoh soal 1 dan 2 adalah untuk barisan aritmetika naik. Bagaimana jika untuk barisan aritmetika turun?

Contoh soal 2:

Ditentukan suku ke-20 suatu BA adalah 225 sedangkan selisih tiap suku adalah 5. Tentukan suku pertama dan suku ke-10.

Jawab:

Diketahui: $U_{20} = 225$ dan $b = 5$, maka:

$$\begin{aligned} U_n &= a + (n-1)b \\ U_{20} &= a + (20-1)5 \\ 225 &= a + 19 \times 5 \\ 225 &= a + 95 \\ a &= 225 - 95 \\ a &= 130 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} U_n &= a + (n-1)b \\ U_{10} &= 130 + (10-1)5 \\ &= 130 + 9 \times 5 \\ &= 130 + 45 \\ &= 175 \end{aligned}$$

Jadi, $U_1 = 130$ dan $U_{10} = 175$.

LATIHAN 4

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

1. Tentukan suku ke-n dari barisan bilangan di bawah ini!
   a. $1, 5, 9, 13, 17, \ldots$
   b. $7, 15, 23, 31, 39, \ldots$
   c. $101, 96, 91, 86, 81, \ldots$
   d. $2, 3\frac{1}{2}, 5, 6\frac{1}{2}, 8, \ldots$
   e. $440, 437, 434, 431, 428, \ldots$
   f. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$
   g. $\frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{12}, \frac{9}{16}, \frac{11}{20}, \ldots$
   h. $1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 4, 4 \times 5, 5 \times 6$
   i. $1 + 3 + 5, 3 + 5 + 7, 5 + 7 + 9, 7 + 9 + 11, 9 + 11 + 13$
2. Tentukan lima suku pertama dari barisan bilangan dengan rumus suku ke-n sebagai berikut!
   a. $U_n = 3n + 5$ b. $U_n = 4n - 2$
   c. $U_n = 1\frac{1}{3}n + 8$ d. $U_n = 250 - 2n$
   e. $U_n = 50 - 12n$ f. $U_n = -5n + 30$
3. Suku ke-40 dari suatu barisan aritmetika adalah 80. Jika selisih tiap sukunya 3, tentukan suku yang pertama dan suku ke sepuluh untuk:
   a. barisan aritmetika naik;
   b. barisan aritmetika turun!
4. Diketahui barisan aritmetika dengan suku ke-4 = 9 dan suku ke-7 = 15. Tentukan:
   a. nilai a dan b;
   b. suku ke-n;
   c. suku ke-50!
5. Suku ke-9 dan suku ke-10 suatu barisan aritmetika adalah 96 dan 102. Tentukanlah suku ke-20 barisan tersebut!
6. Dari suatu barisan aritmetika, diketahui suku ke-5 = 18 dan suku ke-11 = 42. Carilah suku ke-50 barisan tersebut!

6.2.2 Barisan bilangan khusus (Pengayaan)

Di dalam barisan aritmetika, setiap suku yang berurutan memiliki selisih yang tetap. Barisan aritmetika ini disebut barisan bilangan tingkat satu.

Pada barisan bilangan khusus, setiap suku yang berurutan memiliki selisih tetap pada tingkatan tertentu. Perhatikanlah contoh berikut!

Contoh:

1, 3, 5, 7, 9, 11, ...
+2 +2 +2 +2 +2

3, 6, 9, 12, 15, 18, ...
+3 +3 +3 +3 +3

Di bawah ini terdapat barisan bilangan yang setiap suku berurutannya memiliki selisih bertingkat.

1, 3, 6, 10, 15
+2 +3 +4 +5
+1 +1 +1

Barisan bilangan di atas merupakan barisan bilangan tingkat dua, karena baru memiliki selisih yang tetap pada pola yang kedua. Untuk menentukan suku ke-n dari barisan bilangan tingkat dua, kita juga dapat menggunakan hubungan barisan bilangan tersebut dengan bilangan asli. Perhatikan contoh berikut!

Contoh:

1. 1, 3, 6, 10, 15

   +2 +3 +4 +5

   +1 +1 +1

$$U_1 = 1 = \left(\frac{1}{2}\times 1\times 0\right)+1$$

$$U_2 = 3 = \left(\frac{1}{2}\times 2\times 1\right)+2$$

$$U_3 = 6 = \left(\frac{1}{2}\times 3\times 2\right)+3$$

$$U_4 = 10 = \left(\frac{1}{2}\times 4\times 3\right)+4$$

$$U_5 = 15 = \left(\frac{1}{2}\times 5\times 4\right)+5$$

$$U_n = \left(\frac{1}{2}\times n\times (n-1)\right)+n$$

$$U_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + n$$

$$U_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

Dari contoh di atas, $\frac{1}{2}$ diperoleh dari selisih terakhir dibagi 2.

2. 2, 5, 11, 20, 32, ...

   +3 +6 +9 +12

   +3 +3 +3

$$U_1 = 2 = \left(\frac{3}{2}\times 1\times 0\right)+2$$

$$U_2 = 5 = \left(\frac{3}{2}\times 2\times 1\right)+2$$

$$U_3 = 11 = \left(\frac{3}{2}\times 3\times 2\right)+2$$

$$U_4 = 20 = \left(\frac{3}{2}\times 4\times 3\right)+2$$

$$U_5 = 32 = \left(\frac{3}{2}\times 5\times 4\right)+2$$

$$U_n = \left(\frac{3}{2}\times n\times (n-1)\right)+2$$

Perhatikan segitiga PASCAL berikut ini!

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Sepasang diagonal segitiga PASCAL membentuk suatu barisan bilangan dengan urutan 1, 3, 6, 10, ...

1, 3, 6, 10, ...

+2 +3 +4

+1 +1

Barisan pada segitiga PASCAL merupakan barisan bilangan khusus tingkat dua. Karena barisan ini mempunyai selisih yang tetap atau sama pada pola kedua.

$$U_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + 2 = 1\frac{1}{2}n^2 - 1\frac{1}{2}n + 2$$

Dari contoh di atas, $\frac{3}{2}$ diperoleh dari selisih terakhir dibagi 2.

Secara umum, pola barisan tingkat dua dapat disusun sebagai berikut.

$$\boxed{\frac{\text{selisih terakhir}}{2} \times \text{Bilangan asli} \times \text{Bilangan cacah} + K}$$

K dapat berupa konstanta atau barisan bilangan tingkat satu.

Selain cara di atas, ada cara lain untuk menentukan barisan bilangan tingkat dua, yaitu dengan rumus: $U_n = an^2 + bn + c$ dengan $a, b, c \in R$.

Untuk memperoleh suku ke-n, nilai $n = 1$, $n = 2$, dan $n = 3$ disubstitusikan ke rumus $U_n = an^2 + bn + c$. Maka, akan diperoleh sistem persamaan dengan tiga peubah. Dengan cara eliminasi, dapat dicari nilai a, b, dan c.

Nilai a, b, dan c dapat dicari dengan cara eliminasi kemudian dilanjutkan dengan cara substitusi.

Eliminasi adalah pelenyapan atau penghilangan.

Untuk memudahkan, kita ambil 2 persamaan saja untuk dieliminasi.

Contoh soal 3:

Diketahui barisan bilangan $1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$

$U_n = an^2 + bn + c$

$U_1 = a + b + c = 1$ .... (1)

$U_2 = 4a + 2b + c = 3$ .... (2)

$U_3 = 9a + 3b + c = 6$ .... (3)

Berdasarkan persamaan (2) dan (1), didapat:

$$\begin{array}{rl} 4a + 2b + c &= 3 \\ a + b + c &= 1 \\ \hline 3a + b &= 2 \end{array} \; -$$
.... (4)

Berdasarkan persamaan (3) dan (2), didapat:

$$\begin{array}{rl} 9a + 3b + c &= 6 \\ 4a + 2b + c &= 3 \\ \hline 5a + b &= 3 \end{array} \; -$$
.... (5)

Dari persamaan (5) dan (4), didapat:

$$\begin{array}{rl} 5a + b &= 3 \\ 3a + b &= 2 \\ \hline 2a &= 1 \end{array} \; -$$

$\Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{2}$ .... (6)

Bentuk pola bilangan yang unik:

$0 \times 9 + 0 = 0$

$1 \times 9 + 1 = 10$

$12 \times 9 + 2 = 110$

$123 \times 9 + 3 = 1110$

$1234 \times 9 + 4 = 11110$

$12345 \times 9 + 5 = 111110$

$123456 \times 9 + 6 = 1111110$

$1234567 \times 9 + 7 = 11111110$

$12345678 \times 9 + 8 = 111111110$

$123456789 \times 9 + 9 = 1111111110$

Substitusi $a = \frac{1}{2}$ ke persamaan (4), didapat:

$$3a + b = 2$$
$$\Leftrightarrow \quad 3\left(\frac{1}{2}\right) + b = 2$$
$$\Leftrightarrow \quad 1\frac{1}{2} + b = 2$$
$$\Leftrightarrow \quad b = 2 - 1\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Substitusi $a = \frac{1}{2}$ dan $b = \frac{1}{2}$ ke persamaan (1), didapat:

$$a + b + c = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + c = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad 1 + c = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad c = 1 - 1 = 0$$

Jadi, rumus suku ke-n adalah $U_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$.

Diskusi

Diskusikan dengan 2 atau 3 temanmu dalam mengerjakan dan menjawab soal-soal berikut! Kemudian presentasikan hasil kerja kalian di depan kelas!

1. Tentukan suku ke-n dari barisan bilangan di bawah ini dengan menggunakan barisan bilangan asli!
   a. 1, 2, 4, 7, 11, 16, ...
   b. 1, 3, 7, 13, 21, 31, ...
   c. 3, 4, 6, 9, 13, 18, ...
   d. 4, 7, 13, 22, 34, 49, ...
   e. 5, 8, 13, 20, 29, 40, ...
   f. 1, 6, 16, 31, 51, 76, ...
2. Tentukan suku ke-n pada soal nomor 1 dengan rumus
   $U_n = an^2 + bn + c$!
3. Perhatikan setiap penyelesaian pada soal nomor 2! Apakah dari setiap penyelesaian diperoleh persamaan-persamaan: $2a$ = beda tetap (beda tingkat 2), $3a + b = U_2 - U_1$, dan $a + b + c = U_1$?

   Jika ya, gunakan persamaan-persamaan tersebut untuk menentukan suku ke-n dari barisan bilangan pada soal nomor 1!

LATIHAN 5

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

1. Tentukan suku ke-n dari barisan-barisan bilangan berikut!
   a. 1, 4, 10, 19, 31, 46, ...
   b. 2, 4, 8, 14, 22, 32, ...
   c. 3, 7, 15, 27, 43, 63, ...
   d. 4, 5, 7, 10, 14, 19, ...
   e. 5, 10, 20, 35, 55, ...
   f. 1, 8, 22, 43, 71, ...
2. Tentukan suku ke-n dari barisan berikut!
   a. 100, 95, 85, 70, 50, ...
   b. 75, 71, 63, 51, 35, ...
   c. 2, 2 + 4, 2 + 4 + 6, 2 + 4 + 6 + 8, 2 + 4 + 6 + 8 + 10, ...
   d. 2, 2 + 3, 2 + 3 + 5, 2 + 3 + 5 + 7, 2 + 3 + 5 + 7 + 9, ...

Bentuk lain dari pola bilangan yang unik dalam matematika.

Perhatikan bahwa kelipatan (1 – 7) dari bilangan 142857 adalah bilangan yang terdiri dari angka-angka yang sama, namun berbeda urutannya.

$1 \times 142857 = 142857$

$2 \times 142857 = 285714$

$3 \times 142857 = 428571$

$4 \times 142857 = 571428$

$5 \times 142857 = 714285$

$6 \times 142857 = 857142$

$7 \times 142857 = 999999$

Menarik bukan?

6.2.3 Menentukan suku ke-*n* barisan geometri

Pada bagian terdahulu, kita telah mempelajari barisan aritmetika, yaitu barisan yang memiliki selisih tetap untuk dua suku berurutan. Pada bagian ini, kita akan mempelajari barisan bilangan yang mempunyai perbandingan atau rasio tetap untuk dua suku berurutan. Barisan bilangan ini disebut *Barisan Geometri*. Bila rasio dari barisan lebih dari satu maka disebut *Barisan Geometri Naik*. Bila rasio kurang dari satu maka disebut *Barisan Geometri Turun*.

Di bawah ini, kita akan menentukan suku ke-n barisan geometri.

Barisan geometri

$$U_1,\ \underbrace{\quad}_{\times 5}\ U_2,\ \underbrace{\quad}_{\times 5}\ U_3,\ \underbrace{\quad}_{\times 5}\ U_4,\ \underbrace{\quad}_{\times 5}\ U_5,\ \underbrace{\quad}_{\times 5}\ \ldots,\ \underbrace{\quad}_{\ldots}\ U_n$$

Misalkan: $U_1 = a$, maka:

$$\begin{aligned}
U_1 &= a && = a \times r^0\\
U_2 &= a \times r && = a \times r^1\\
U_3 &= a \times r \times r && = a \times r^2\\
U_4 &= a \times r \times r \times r && = a \times r^3\\
U_5 &= a \times r \times r \times r \times r && = a \times r^4\\
&\ \vdots\\
U_n &= a \times \underbrace{r \times r \times r \times \ldots \times r}_{(n-1)\text{ faktor}} && = a \times r^{n-1}
\end{aligned}$$

Jadi, untuk menentukan suku ke-n dari barisan geometri, digunakan rumus:

$$\boxed{U_n = a \times r^{n-1}}$$

di mana: $a = U_1$ dan $r = \dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{U_3}{U_2} = \ldots$ (r : rasio).

Rumus suku ke-n barisan geometri:

$$U_n = a \times r^{n-1}$$
$$= ar^{(n-1)}$$

adalah fungsi eksponen (logaritma) dalam variabe n.

Contoh soal 4:

Diketahui barisan geometri $3, 6, 12, 24, 48, \ldots$

Tentukan: a. rumus suku ke-n;

b. suku ke-10!

Jawab:

a. $a = 3$

$r = \dfrac{6}{3} = 2$

$U_n = a \times r^{n-1}$

$\Leftrightarrow U_n = 3 \times 2^{n-1}$

b. $U_n = a \times r^{n-1}$

$U_{10} = 3 \times 2^{10-1}$

$= 3 \times 2^9$

$= 3 \times 512$

$= 1.536$

Contoh soal 5:

Ditentukan suku ke-6 suatu barisan geometri adalah 486. Jika suku yang pertama 2, tentukan:

a. rasio; b. rumus suku ke-n!

Jawab:

a. $U_n = a \times r^{n-1}$

$U_6 = a \times r^{6-1}$

$\Leftrightarrow 486 = 2 \times r^5$

$\Leftrightarrow r^5 = \frac{486}{2}$

$\Leftrightarrow r^5 = 243$

$\Leftrightarrow r^5 = 3^5$

$\Leftrightarrow r = 3$

b. $U_n = a \times r^{n-1}$

$U_n = 2 \times 3^{n-1}$

6.3 Jumlah *n* Suku Pertama Deret Aritmetika dan Geometri

Yang dimaksud deret adalah jumlah suku-suku suatu barisan bilangan. Jika yang dijumlahkan suku-suku pada barisan aritmetika, maka disebut deret aritmetika dan jika yang dijumlahkan suku-suku pada barisan geometri maka disebut deret geometri.

Pada subbab ini, kita akan mempelajari bagaimana menentukan jumlah n suku pertama deret aritmetika dan deret geometri.

6.3.1 Menentukan jumlah *n* suku pertama deret aritmetika

Barisan bilangan 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., n adalah barisan aritmetika. Jika suku-suku dari barisan tersebut kita jumlahkan maka akan terbentuk Deret. Karena suku-sukunya berasal dari barisan aritmetika, maka disebut *Deret Aritmetika*.

Contoh-contoh deret aritmetika:

1. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots$
2. $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \ldots$
3. $5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + \ldots$
4. $100 + 98 + 96 + 94 + 92 + \ldots$

Berikut ini adalah cara menentukan jumlah n suku dari deret aritmetika.

$$\begin{array}{ccccccccccccccl} 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \ldots & + & (n-1) & + & n & = & S_n \\ n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & (n-3) & + & \ldots & + & 2 & + & 1 & = & S_n \\ \hline \end{array} +$$

$$\underbrace{(1+n) + (1+n) + (1+n) + (1+n) + \ldots + (1+n) + (1+n)}_{\text{ada } n \text{ suku}} = 2S_n$$

Kita misalkan jumlah n suku deret aritmetika $= S_n$

INFO MATEMATIKA

Selain dengan pensil, kertas, dan kalkulator, matematika juga dapat kita temukan di alam sekitar. Seperti barisan Fibonacci yang terdapat pada pola struktur tumbuh beberapa tanaman dan hewan. Berikut ini contoh-contohnya:

1. Jumlah ruas bagian dalam buah-buahan, misalnya pisang terdiri dari 3 ruas, sedangkan apel 5 ruas.
2. Jumlah daun bunga pada mahkota bunga, seperti bunga mawar, lily, aster, daisy, iris, dan lain-lain.

   Ada yang berjumlah lima, delapan, dan dua puluh satu.

Sumber: http://jwilson.coe.uga.edu/EMAT6680/Parveen/Fib_nature.htm

http://www.sciencenews.org/articles/20060603/mathrek.asp

Jenis-jenis deret antara lain:

1. Deret aritmetika atau deret hitung
2. Deret geometri atau deret ukur
3. Deret geometri tak hingga
4. Deret hitung ukur atau deret campuran
5. Deret selaras atau deret harmonis

$n(1+n) = 2S_n \Leftrightarrow S_n = \frac{1}{2}n(1+n)$

Karena $U_1 = 1$ dan $U_n = n$, maka:

$S_n = \frac{1}{2}n(U_1 + U_n)$

Bentuk di atas dapat diubah menjadi:

(Ingat: $U_n = a + (n-1)b$!)

$$S_n = \frac{1}{2}n\left(a + a + (n-1)b\right)$$

$$\Leftrightarrow S_n = \frac{1}{2}n\left(2a + (n-1)b\right)$$

Rumus jumlah n suku pertama deret aritmetika adalah fungsi kuadrat dalam n.

Coba kamu tunjukkan!

Jadi, untuk menentukan jumlah n suku pertama dari deret aritmetika adalah dengan rumus:

$$\boxed{S_n = \frac{1}{2}n(U_1 + U_n)} \quad \text{atau} \quad \boxed{S_n = \frac{1}{2}n\left(2a + (n-1)b\right)}$$

Contoh soal 6:

Tentukan jumlah dari $2 + 5 + 8 + 11 + \ldots$ sampai 50 suku.

Jawab:

Diketahui: $a = 2$, $b = 5 - 2 = 3$, dan $n = 50$.

$$S_n = \frac{1}{2}n\left(2a + (n-1)b\right)$$

$$\Leftrightarrow S_{50} = \frac{1}{2} \times 50\left(2 \times 2 + (50-1)3\right)$$

$$\Leftrightarrow S_{50} = 25(4 + 49 \times 3)$$

$$\Leftrightarrow S_{50} = 25(4 + 147)$$

$$\Leftrightarrow S_{50} = 25 \times 151$$

$$\Leftrightarrow S_{50} = 3.775$$

Jadi, jumlah dari $2 + 5 + 8 + 11 + \ldots$ sampai 50 suku adalah 3.775.

Cara lain:

$U_1 = a = 2$

$b = 3$

$U_{50} = 2 + (50-1)3$
$= 2 + (49)3$
$= 2 + 147$
$= 149$

$S_{50} = \frac{1}{2} \cdot 50(2 + 149)$
$= 25(151)$
$= 3.775$

Contoh soal 7:

Tentukan jumlah dari $4 + 9 + 14 + 19 + \ldots + 74$.

Jawab:

Diketahui: $a = 4$, $b = 9 - 4 = 5$, dan $U_n = 74$.

a. Kita mencari nilai n terlebih dahulu.

$$U_n = a + (n-1)b$$

$$\Leftrightarrow 74 = 4 + (n-1)5$$

$$\Leftrightarrow 74 - 4 = 5n - 5$$

$$\Leftrightarrow 70 = 5n - 5$$

$\Leftrightarrow \quad 5n = 70 + 5$

$\Leftrightarrow \quad n = \frac{75}{5}$

$\Leftrightarrow \quad n = 15$

b. $\quad S_n = \frac{1}{2}n\,(U_1 + U_n)$

$\Leftrightarrow \quad S_{15} = \frac{1}{2} \times 15\,(4 + 74)$

$\Leftrightarrow \quad S_{15} = \frac{1}{2} \times 15 \times 78$

$\Leftrightarrow \quad S_{15} = 585$

Jadi, $4 + 9 + 14 + 19 + \ldots + 74 = 585$.

Cara lain:

$a = 4$, $b = 5$

$$\begin{aligned} S_{15} &= \frac{1}{2} \times 15(2 \times 4 + (15 - 1)5) \\ &= 7{,}5(8 + (14)5) \\ &= 7{,}5(8 + 70) \\ &= 7{,}5(78) \\ &= 585 \end{aligned}$$

LATIHAN 6

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

A. Hitunglah jumlah barisan bilangan berikut!

1. $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots$ sampai 100 suku
2. $1 + 4 + 7 + 10 + 13 + \ldots$ sampai 50 suku
3. $2 + 6 + 10 + 14 + \ldots + 278$
4. $5 + 10 + 15 + 20 + \ldots + 295$
5. $100 + 97 + 94 + 91 + \ldots$ sampai 40 suku
6. $200 + 194 + 188 + 182 + \ldots + 28$

B. Selesaikan soal berikut!

1. Hitunglah jumlah bilangan genap antara 100 dan 200!
2. Hitunglah jumlah bilangan kelipatan 3 antara 50 dan 100!
3. Hitunglah jumlah bilangan kelipatan 5 antara 200 dan 300!
4. Hitunglah jumlah bilangan kelipatan 2 antara 300 dan 500 yang bukan kelipatan 3!

6.3.2 Menentukan jumlah *n* suku pertama deret geometri

$a, ar^1, ar^2, ar^3, \ldots, ar^{n-1}$ adalah barisan geometri. Bila suku-suku barisan geometri kita jumlahkan maka akan terbentuk deret geometri.

Contoh-contoh deret geometri:

1. $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$
2. $2 + 6 + 18 + 54 + 162 + \ldots$
3. $1 + 4 + 16 + 64 + 256 + \ldots$

Berikut ini adalah cara menentukan jumlah n suku dari deret geometri.

Kita misalkan jumlah n suku deret geometri $= S_n$

$$\begin{array}{rl} a + ar^1 + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} &= S_n \\ ar^1 + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n &= rS_n \quad \text{(kita kalikan dengan } r\text{)} \\ \hline a - ar^n &= S_n - rS_n \end{array} -$$

$$\Leftrightarrow \quad a\left(1-r^n\right) = S_n\left(1-r\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad S_n = \frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r}$$

Apabila baris ke-2 kita kurangkan dengan baris ke-1 maka akan diperoleh:

$$-a + ar^n = rS_n - S_n$$

$$\Leftrightarrow \quad ar^n - a = S_n\left(r-1\right)$$

$$\Leftrightarrow a\left(r^n - 1\right) = S_n\left(r-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad S_n = \frac{a\left(r^n-1\right)}{r-1}$$

Jadi, rumus jumlah n suku pertama deret geometri adalah:

$$\boxed{S_n = \frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r}}$$, untuk $r < 1$ dan $r \neq 1$; atau

$$\boxed{S_n = \frac{a\left(r^n-1\right)}{r-1}}$$, untuk $r > 1$ dan $r \neq 1$

Rumus jumlah n suku pertama pada deret geometri juga merupakan fungsi logaritma dalam n.

Contoh soal 8:

Tentukan jumlah dari $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$, sampai 10 suku.

Jawab:

Diketahui: $a = 1$, $r = \frac{2}{1} = 2$

$$S_n = \frac{a\left(r^n-1\right)}{r-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad S_{10} = \frac{1 \times \left(2^{10}-1\right)}{2-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad S_{10} = \frac{1 \times \left(1.024-1\right)}{1}$$

$$\Leftrightarrow \quad S_{10} = 1.023$$

Jadi, jumlah dari $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$, sampai 10 suku adalah 1.023.

INFO MATEMATIKA

Golden Ratio (Fibonacci)

Mulai dari suku ke-n untuk n bilangan asli tertentu, perbandingan U_{n+1} dengan U_n pada barisan Fibonacci menunjukkan rasio tetap yang dikenal sebagai "Golden Ratio" atau rasio emas. Nilai rasio emas adalah 1,618.

Jika $U_1 = 0$ dan $U_2 = 1$, maka mulai dari suku ke-13 pada barisan Fibonacci 0, 1, 1, 2, 3, 5, ... diperoleh

$U_{13} = 144$

$U_{14} = 233$

$U_{15} = 377$

$U_{16} = 610$

Perhatikanlah!

$$\frac{U_{14}}{U_{13}} = \frac{233}{144} = 1{,}618$$

$$\frac{U_{15}}{U_{14}} = \frac{377}{233} = 1{,}618$$

$$\frac{U_{16}}{U_{15}} = \frac{610}{377} = 1{,}618$$

Sumber: Rasio emas, Harun Yahya

at: http://www.harunyahya.com/indo/artikel/068.htm

LATIHAN 7

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

1. Tentukan suku ke-n dari barisan bilangan di bawah ini!
   a. 2, 4, 8, 16, 32, ...
   b. 5, 10, 20, 40, 80, ...
   c. 1, 3, 9, 27, 81, ...
   d. 800, 400, 200, 100, 50, ...
   e. $4, 6, 9, 13\frac{1}{2}, 20\frac{1}{4}, \ldots$
   f. $400, 160, 40, 10, 2\frac{1}{4}, \ldots$
   g. 1.875, 375, 75, 15, ...
2. Tentukan suku ke-8 barisan geometri yang suku pertamanya 5 dan rasionya 3!
3. Suku ke-7 barisan geometri adalah 4.096 dan suku pertamanya adalah 1. Tentukan rasio dan suku ke-5 dari barisan tersebut!
4. Suku ke-3 dan suku ke-6 suatu barisan geometri adalah 4 dan 32. Tentukan nilai r, a, dan S_n!
5. Suku ke-4 dan suku ke-7 suatu barisan geometri adalah 250 dan 31.250. Tentukan suku ke-6!
6. Tentukan jumlah dari $2 + 6 + 18 + 54 + \ldots$, sampai 10 suku!
7. Tentukan jumlah dari $4 + 12 + 36 + 108 + \ldots$, sampai 12 suku!
8. Tentukan jumlah dari $1.600 + 800 + 400 + \ldots$, sampai 8 suku!

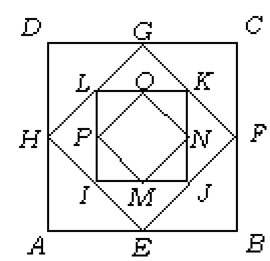
6.4 Penerapan Pola, Barisan, dan Deret Bilangan

Untuk memahami penerapan pola bilangan dan barisan bilangan, perhatikan contoh-contoh berikut!

Contoh:

1. Gambar di samping adalah persegi *ABCD*. Titik tengah sisi-sisi persegi *ABCD* membentuk persegi *EFGH*. Titik tengah sisi-sisi persegi *EFGH* membentuk persegi *IJKL*, dan seterusnya.

   Jika panjang sisi *AB* adalah 1 satuan maka kita dapat menentukan luas persegi ke-n dengan menggunakan rumus aljabar suku ke-n.



Gambar 6.3
Persegi *ABCD*

$$U_1 = \text{Luas daerah } ABCD = 1 \text{ satuan} = 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-1}$$

$$U_2 = \text{Luas daerah } EFGH = \frac{1}{2} \text{ satuan} = \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2-1}$$

$$U_3 = \text{Luas daerah } IJKL = \frac{1}{4} \text{ satuan} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1}$$

$$U_4 = \text{Luas daerah } MNOP = \frac{1}{8} \text{ satuan} = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{4-1}$$

$$\vdots$$

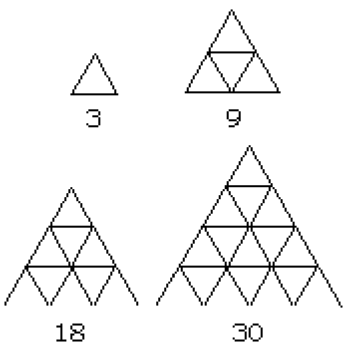
$$U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Dari contoh di atas $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ merupakan barisan geometri.

$$\text{Rasio } = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Rasio } \frac{U_3}{U_2} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{1}{2} \text{ dan setrusnya}$$

Jadi, rumus luas persegi ke-n adalah $U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$



Gambar 6.5
Susunan segitiga

2. Perhatikan gambar 6.5 susunan segitiga di samping!

   Pada gambar susunan segitiga itu, setiap segitiga sama sisi terkecil dibentuk oleh tiga batang lidi. Setiap batang panjangnya 1 satuan. Jumlah panjang batang lidi yang menyusun segitiga tersebut tercantum di bawah gambar. Untuk mencari banyaknya atau jumlah panjang batang yang menyusun segitiga-segitiga tersebut, dapat kita gunakan rumus aljabar suku ke-n.

   3 9 18 30
   +6 +9 +12
   +3 +3

   Ternyata, pola di atas merupakan barisan bilangan tingkat dua.

$$U_1 = 3 = \left(\frac{3}{2} \times 1 \times 0\right) + 3 = \left(\frac{3}{2} \times 1 \times 0\right) + (3 \times 1)$$

$$U_2 = 9 = \left(\frac{3}{2} \times 2 \times 1\right) + 6 = \left(\frac{3}{2} \times 2 \times 1\right) + (3 \times 2)$$

$$U_3 = 18 = \left(\frac{3}{2} \times 3 \times 2\right) + 9 = \left(\frac{3}{2} \times 3 \times 2\right) + (3 \times 3)$$

$$U_4 = 30 = \left(\frac{3}{2} \times 4 \times 3\right) + 12 = \left(\frac{3}{2} \times 4 \times 3\right) + (3 \times 4)$$

$$U_n = \left(\frac{3}{2} \times n \times (n-1)\right) + (3 \times n)$$

$$\vdots$$

$$U_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + 3n$$

$$U_n = 1\frac{1}{2}n^2 + 1\frac{1}{2}n$$

LATIHAN 8

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

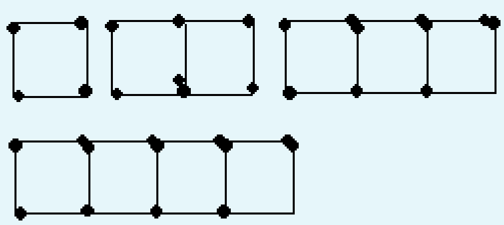
1. a. Gambarlah sebuah segi empat! Berapa banyak diagonal yang dapat ditarik dari titik-titik sudutnya?

   b. Lakukan lagi hal seperti di atas untuk segi lima, segi enam, dan segi tujuh!

   c. Susunlah suatu barisan bilangan yang menyatakan jumlah diagonal dari segi empat, segi lima, segi enam, dan segi tujuh!

   d. Tentukan banyaknya diagonal pada segi-n!

   e. Tentukan banyaknya diagonal pada segi-50!

2. 

   Gambar di atas adalah susunan persegi-persegi yang dibentuk dari batang korek api.

   a. Tulislah banyaknya batang korek api yang membentuk masing-masing gambar!

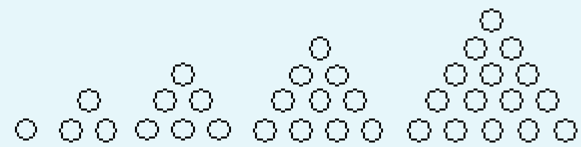
   b. Tanpa menggambar, tentukan banyaknya batang korek api untuk pola yang kelima dan keenam!

   c. Tentukanlah banyaknya batang korek api untuk pola yang ke-n!

3. Dalam pertandingan sistem setengah kompetisi, setiap regu harus bertanding dengan regu lain sebanyak satu kali. Berapa banyaknya pertandingan yang terjadi jika dalam suatu kejuaraan jumlah regunya sebagai berikut!

   a. 2 regu   b. 3 regu
   c. 4 regu   d. 5 regu
   e. 6 regu   f. n regu

4. Perhatikan pola segitiga berikut!

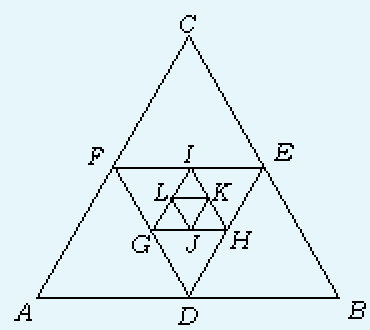
   a. Tulislah banyaknya noktah yang menyusun pola segitiga tersebut!

   b. Tanpa menggambar, lanjutkan untuk menentukan banyaknya titik pada dua pola berikutnya!

   c. Tentukanlah rumus aljabar untuk pola ke-n!

5. Segitiga ABC pada gambar di bawah merupakan segitiga sama sisi yang luasnya 1 satuan. Segitiga-segitiga di dalamnya merupakan segitiga sama sisi yang dibentuk dari titik tengah segitiga-segitiga sebelumnya.

   a. Tentukan luas masing-masing segitiga yang terbentuk!

   b. Tanpa menggambar, tentukan luas segitiga untuk pola ke-5, ke-6, dan ke-n!

6. Dalam suatu pesta reuni hadir 20 orang. Jika setiap orang menyalami peserta reuni lain yang hadir, berapa jabat tangankah yang terjadi dalam peserta reuni tersebut?

7. Pada suatu lomba, 5 bendera ditempatkan pada satu garis lurus. Setiap bendera ditempatkan pada jarak yang sama yaitu 5 meter. Jarak garis start dengan bendera pertama juga 5 meter. Setiap peserta hanya boleh mengambil 1 bendera untuk mengumpulkan bendera pada garis start. Berapa meterkah jarak yang ditempuh setiap peserta untuk mengumpulkan 5 bendera?

RANGKUMAN

- Barisan Bilangan

a. Barisan Aritmetika (BA) adalah barisan bilangan yang mempunyai selisih atau beda yang tetap.

$$U_1, \quad U_2, \quad U_3, \quad U_4, \quad \ldots$$
$$+b \qquad +b \qquad +b$$

$$U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = U_4 - U_3 = \ldots = b$$

(b = beda)

Rumus suku ke-n BA:

$$U_n = a + (n-1)b \; ; \; a = U_1$$

b. Barisan Geometri (BG) adalah barisan bilangan yang mempunyai rasio atau perbandingan tetap untuk dua suku berurutan.

$$U_1, \quad U_2, \quad U_3, \quad U_4, \quad \ldots$$
$$\times r \qquad \times r \qquad \times r$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \frac{U_4}{U_3} = \ldots = r$$

(r = rasio)

Rumus suku ke-n BG: $U_n = a \times r^{n-1}$

c. Barisan Bilangan Tingkat Dua adalah barisan bilangan yang mempunyai selisih yang tetap pada pola yang kedua.

$$U_1, \quad U_2, \quad U_3, \quad U_4, \quad \ldots$$
$$+b_1 \qquad +b_2 \qquad +b_3 \qquad +b_4$$
$$+b_t \qquad +b_t \qquad +b_t$$

b_t = beda tetap

Rumus suku ke-n:

$$U_n = an^2 + bn + c$$

untuk $2a = b_t$; $3a + b = b_1$; dan

$a + b + c = U_1$

- Deret

a. Deret Aritmetika (DA) adalah jumlah suku-suku dari suatu barisan aritmetika.

Rumus menentukan jumlah n suku dari BA:

$$S_n = \frac{1}{2}n\left(U_1 + U_n\right) \text{ atau}$$

$$S_n = \frac{1}{2}n\left(2a + (n-1)b\right)$$

S_n = jumlah suku ke-n

b. Deret Geometri (DG) adalah jumlah suku-suku dari suatu barisan geometri.

Rumus menentukan jumlah n suku dari BG:

$$S_n = \frac{a\left(1 - r^n\right)}{1 - r}, \text{ untuk } r < 1 \text{ dan } r \neq 1;$$

atau

$$S_n = \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r - 1}, \text{ untuk } r > 1 \text{ dan } r \neq 1$$

EVALUASI

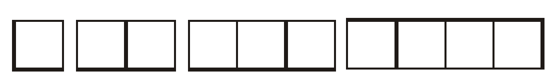
I. Pemahaman Konsep

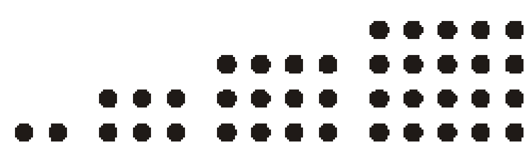
Kerjakanlah soal-soal di bawah ini!

1. Lanjutkan pola di bawah ini sebanyak tiga bilangan lagi dan tulis aturannya!
   a. 2, 5, 8, 11, 14, ...
   b. 300, 294, 288, 282, ...
   c. 1, 3, 7, 13, 21, ...
   d. 2, 3, 5, 7, 11, ...
   e. 100, 121, 144, 169, ...
   f. 1, 3, 9, 27, ...
2. Tentukan suku ke-6, suku ke-10, dan suku ke-15 dari barisan bilangan berikut!
   a. 1, 3, 5, 7, 9, ...
   b. 1, 4, 9, 16, 25, ...
   c. 1, 11, 21, 31, 41, ...
   d. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$
   e. $1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 4, \ldots$
3. Tentukan lima suku pertama dari barisan bilangan yang rumus suku ke-n nya sebagai berikut!
   a. $S_n = 100 - 2n$
   b. $S_n = 5n + n^2$
   c. $S_n = 2n - 1$
   d. $S_n = n^2 - n + 1$
4. Tentukan rumus suku ke-n dari barisan bilangan berikut!
   a. 7, 8, 9, 10, 11, ...
   b. 10, 13, 16, 19, 22, ...
   c. 100, 96, 92, 88, ...
   d. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$
   e. $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$
   f. $1, -2, 4, -8, 16, \ldots$
   g. 2, 3, 5, 8, 12, ...
   h. 3, 5, 9, 15, 23, ...
   i. 4, 8, 16, 32, 64, ...
   j. 1, 3, 9, 27, 81, ...

II. Penalaran dan Komunikasi

Selesaikanlah soal-soal di bawah ini!

1. Diketahui barisan aritmetika $U_3 = 8$ dan $U_{50} = 149$.
   Tentukan:
   a. suku pertama;
   b. beda;
   c. suku ke-100;
   d. rumus suku ke-n;
   e. jumlah 50 suku pertama!
2. Tentukan jumlah deret berikut!
   a. $1 + 2 + 4 + 6 + \ldots$, sampai 12 suku.
   b. $3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \ldots$, sampai 40 suku.
   c. $100 + 96 + 92 + \ldots$, sampai 20 suku.
   d. $3 + 6 + 12 + 24 + \ldots$, sampai 15 suku.
3. Diketahui barisan geometri $U_2 = 48$ dan $U_4 = 12$.
   Tentukan:
   a. suku pertama;
   b. rasio;
   c. U_5;
   d. U_8;
   e. jumlah delapan suku pertama!
4. 

   Banyaknya lidi pada pola ke-8 adalah ... .
5. 

   Banyaknya noktah pada pola ke-50 adalah ... .
6. Tentukan rumus suku ke-n dari soal nomor 5!

7. Tentukan rumus suku ke-n dari:
   a. 1, 8, 27, 64, ...
   b. 2, 6, 12, 20, ...
   c. 2, 8, 18, 32, ...
   d. $\frac{3}{5}, \frac{5}{9}, \frac{7}{13}, \frac{9}{17}, \ldots$.
8. Hitunglah jumlah bilangan genap antara 1 dan 200!
9. 15 + 20 + 25 + 30 + ... + 95 = ...
10. Hitunglah jumlah bilangan genap antara 1 dan 100 yang bukan kelipatan 3!

III. Pemecahan Masalah

Selesaikanlah soal-soal di bawah ini!

1. Pada baris pertama dari sebuah gedung pertunjukan, terdapat 10 kursi. Untuk setiap baris berikutnya, jumlah kursi akan bertambah 2 buah.
   a. Tentukan jumlah kursi pada baris pertama, dua baris pertama, tiga baris pertama, empat baris pertama, dan lima baris pertama!
   b. Tentukan jumlah kursi pada n baris pertama!
   c. Berapa jumlah kursi pada gedung pertunjukan jika pada gedung tersebut terdapat 50 baris kursi?
2. Gaji seorang pegawai pabrik mula-mula Rp 800.000,00. Setiap bulan gajinya bertambah 5 % dari gaji sebelumnya. Tentukan:
   a. jumlah kenaikan gaji selama setahun;
   b. besar gaji setelah 2 tahun!
3. Di suatu gedung serba guna terdapat 20 baris kursi. Pada baris paling depan tersedia 20 kursi, baris belakangnya memuat 3 kursi lebih banyak dari baris depannya.
   a. Tentukan jumlah kursi pada baris ke-15!
   b. Tentukan jumlah kursi di dalam gedung serba guna tersebut!
4. Dalam suatu rapat koperasi dihadiri oleh 15 orang yang saling berjabat tangan satu sama lain. Tentukan jumlah jabat tangan yang terjadi dalam rapat tersebut!
5. A adalah jumlah bilangan kelipatan 3 antara 50 dan 100.

   B adalah jumlah bilangan kelipatan 2 antara 50 dan 100.

   Tentukanlah:
   a. $A + 2B$;
   b. $2B - 3A$!

Bab 7

Persamaan dan Fungsi Kuadrat (Pengayaan)

Gambar 7.1

Derasnya aliran air terjun di Cibodas

Sumber: Dokomen Pribadi

Di kelas VII kita telah mempelajari tentang persamaan, khususnya persamaan linear. Mari kita ingat kembali apa itu persamaan dan persamaan linear. Persamaan adalah kalimat terbuka yang menyatakan hubungan "sama dengan" (ditulis "="). Sedangkan persamaan linear adalah persamaan dengan pangkat (derajat) satu.

Dalam kehidupan sehari-hari, tanpa disadari kita sudah mengenal dan menggunakan persamaan kuadrat. Contohnya saja, dapat kamu lihat pada gambar 7.1 di atas. Itu adalah sebuah gambaran persamaan kuadrat. Jika kita mengetahui ketinggian air terjun tersebut maka kita dapat mengukur waktu yang diperlukan air yang mengalir deras dari puncak sampai ke dasar. Carilah contoh lain yang berhubungan dengan persamaan dan fungsi kuadrat!

Pada bab ketujuh ini (bab pengayaan), kita akan membahas tentang persamaan dan fungsi kuadrat. Materi yang akan kita pelajari antara lain persamaan kuadrat dan bagaimana cara menyelesaikannya serta penerapan persamaan kuadrat.

Jadi, 2 atau -2 bukan akar persamaan $x^2 - 16 = 0$. Ternyata,

Diskusi Pembuka

1. Apa yang kamu ketahui tentang persamaan kuadrat?
2. Cara apa saja yang dapat dipakai untuk menyelesaikan persamaan kuadrat?
3. Apa yang kamu ketahui tentang fungsi kuadrat itu?

7.1 Persamaan Kuadrat

Perhatikan beberapa persamaan berikut ini.

a. $p^2 - 4 = 0$ b. $q^2 - 9q = 0$

c. $k^2 - 2k + 1 = 0$ d. $2x^2 + 3x - 2 = 0$

Setiap persamaan tersebut hanya memuat satu peubah (variabel) dan pangkat tertinggi variabel tersebut adalah dua. Persamaan seperti itu disebut persamaan kuadrat. Persamaan kuadrat dalam p memuat variabel p, persamaan dalam x memuat variabel x, dan seterusnya. Persamaan kuadrat dalam x dapat dituliskan dalam bentuk umum sebagai berikut.

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

dengan $a, b, c \in R$ dan $a \neq 0$.

a merupakan koefisien x^2, b merupakan koefisien x, dan c merupakan suku tetap atau konstanta.

Sebagai contoh, perhatikan persamaan kuadrat di bawah ini!

a. $2x^2 + 3x - 2 = 0$; $a = 2$, $b = 3$, dan $c = -2$

b. $x^2 - 6x + 9 = 0$; $a = 1$, $b = -6$, dan $c = 9$

c. $3x^2 - x = 0$; $a = 3$, $b = -1$, dan $c = 0$

d. $x^2 - 16 = 0$; $a = 1$, $b = 0$, dan $c = -16$

Penyelesaian atau akar suatu persamaan kuadrat dalam x adalah pengganti x sedemikian hingga persamaan tersebut menjadi benar.

Contoh:

Diketahui persamaan kuadrat $x^2 - 16 = 0$.

Jika x diganti 4 maka $(4)^2 - 16 = 0$

$\Leftrightarrow$ $16 - 16 = 0$

$\Leftrightarrow$ $0 = 0$ (benar)

Jika x diganti -4 maka $(-4)^2 - 16 = 0$

$\Leftrightarrow$ $16 - 16 = 0$

$\Leftrightarrow$ $0 = 0$ (benar)

Jadi, akar persamaan $x^2 - 16 = 0$ adalah benar 4 atau -4.

Jika x diganti 2 maka $(2)^2 - 16 = 0$

$\Leftrightarrow$ $4 - 16 = 0$

$\Leftrightarrow$ $-12 = 0$ (salah)

Jika x diganti dengan -2 maka $(-2)^2 - 16 = 0$

$\Leftrightarrow$ $4 - 16 = 0$

$\Leftrightarrow$ $-12 = 0$ (salah)

Persamaan kuadrat juga sering disebut dengan persamaan pangkat dua.

Persamaan kuadrat adalah persamaan yang berbentuk $ax^2 + bx + c = 0$ di mana $a, b, c \in R$ dan $a \neq 0$.

Jika $a = 0$, persamaan tersebut bukan lagi persamaan kuadrat.

Bentuk lain dari persamaan kuadrat adalah:

- Jika $c = 0 \Rightarrow ax^2 + bx = 0$ disebut persamaan kuadrat yang tidak lengkap.
- Jika $b = 0 \Rightarrow ax^2 + c = 0$ disebut persamaan kuadrat bentuk asli.

akar persamaan $x^2 - 16 = 0$ hanyalah 4 atau -4. Cobalah untuk nilai x yang lain!

Ada tiga cara untuk menyelesaikan persamaan kuadrat, yaitu: memfaktorkan, melengkapkan kuadrat sempurna, dan menggunakan rumus.

7.2 Penyelesaian Persamaan Kuadrat dengan Pemfaktoran

Telah kita ketahui bahwa perkalian dengan nol akan menghasilkan nol. Sebaliknya, suatu perkalian apabila menghasilkan nol, pasti salah satu bilangan yang dikalikan bernilai nol.

Misalnya:

- bila $3x = 0$ maka pasti $x = 0$;
- bila $5(x-4) = 0$ maka pasti $x - 4 = 0$;
- bila $pq = 0$ maka $p = 0$ atau $q = 0$ atau $p = q = 0$.

Contoh soal 1:

Selesaikan persamaan kuadrat berikut!

a. $x^2 + 2x - 3 = 0$ b. $3x^2 = 5x + 2$ c. $2x^2 + 6x = 0$

Jawab:

a. $x^2 + 2x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+3) = 0$

$\Leftrightarrow x - 1 = 0$ atau $x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ atau $x = -3$

b. $3x^2 = 5x + 2$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (3x+1)(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow 3x + 1 = 0$ atau $x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$ atau $x = 2$

c. $2x^2 + 6x = 0$

$\Leftrightarrow 2x(x+3) = 0$

$\Leftrightarrow 2x = 0$ atau $x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ atau $x = -3$

Bermain dengan Matematika

Konsep Persamaan Aljabar dalam Permainan Tebak Angka

Simpan dalam hati sebuah bilangan, lalu jumlahkan dengan angka 4. Hasilnya dikalikan 6, lalu kurangi dengan 9 kemudian dibagi 3. Berikutnya tambahkan dengan 13 dan dibagi hasinya dengan 2. Sebutkan hasil akhirnya!

Rahasia untuk menebak angka yang dirahasiakan adalah hasil perhitungan akhir dikurangi 9. Berapapun angka yang disembunyikan pasti bisa ditebak. Dengan menggunakan konsep persamaan, pemecahan tebak angka tersebut dirumuskan sebagai berikut:

Misalkan bilangan yang dirahasiakan x.

1. Jumlahkan dengan 4, menjadi $x + 4$
2. Hasil (1) dikali 6,
   $(x+4)6 = 6x + 24$
3. Hasil (2) dikurangi 9,
   $(6x+24) - 9 = 6x + 24 - 9$
   $= 6x + 15$
4. Hasil (3) dibagi dengan 3,
   $(6x+15) : 3 = \frac{6x+15}{3}$
   $= 2x + 5$
5. Sekarang jumlah hasil (4) dengan 13,
   $(2x+5) + 13 = 2x + 18$
6. Terakhir bagi hasil (5) dengan 2, diperoleh
   $\frac{2x+18}{2} = x + 9$

   Perhatikan bahwa x adalah bilangan yang akan ditebak. Berapapun x, dapat diketahui dengan mengurangi hasil pada langkah (6) dengan angka 9.

Selamat bermain.

Sumber: Taofik Hidayat, Alumni Departemen Matematika ITB. Pada http://www.pikiran–rakyat.com

Contoh soal 2:

Tentukan himpunan penyelesaian dari $9x^2 - 4 = 0$!

Jawab:

$9x^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (3x-2)(3x+2) = 0$

$\Leftrightarrow 3x - 2 = 0$ atau $3x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$ atau $x = -\frac{2}{3}$

Himpunan penyelesaiannya adalah $\left\{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}$.

LATIHAN 1

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

1. Tentukan nilai yang memenuhi persamaan berikut!
   a. $3(3x-2) = 0$
   b. $p(p-4) = 0$
   c. $5(t-2)(t+3) = 0$
   d. $(3n-4)^2 = 0$
   e. $(-7n+1)(6n-5) = 0$
   f. $-(2m-5)(2m+5) = 0$
2. Selesaikan persamaan-persamaan berikut dengan memfaktorkan!
   a. $4x - 6x^2 = 0$
   b. $9y^2 - 25 = 0$
   c. $3x^2 - 17x - 6 = 0$
   d. $-12 + 26x - 4x^2 = 0$
   e. $2(x-3) = (2x-3)(3-x)$
   f. $x^2 + (x+2)^2 = 2$
3. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan-persamaan berikut!
   a. $x^2 + x = 0$
   b. $x^2 - 25 = 0$
   c. $9x^2 - 1 = 0$
   d. $2x^2 + 7x - 15 = 0$
   e. $-3x^2 - 7x + 6 = 0$
4. Diketahui 4 adalah salah satu akar (penyelesaian) persamaan $x^2 + 5 = a(3x - a - 2)$. Tentukan nilai a!
5. Tentukan nilai b jika 5 merupakan salah satu penyelesaian persamaan $2x^2 + x + b = 0$! Tentukan juga penyelesaian yang lain!

7.3 Penyelesaian Persamaan Kuadrat dengan Melengkapkan Kuadrat Sempurna

Jika $x^2 = 25$ maka $x = 5$ atau $x = -5$, sebab 5 atau -5 apabila dikuadratkan akan menjadi 25. Kita dapat memperoleh 5 atau -5 dengan cara sebagai berikut.

$$x^2 = 25$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{25}$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 5 \quad \text{atau} \quad x = -5$$

Perhatikan beberapa contoh penyelesaian berikut!

a. $$9x^2 = 100$$
$$\Leftrightarrow \quad (3x)^2 = 100$$
$$\Leftrightarrow \quad 3x = \pm\sqrt{100}$$
$$\Leftrightarrow \quad 3x = 10 \quad \text{atau} \quad 3x = -10$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{10}{3} \quad \text{atau} \quad x = -\frac{10}{3}$$

b. $$(4x-3)^2 = 16$$
$$\Leftrightarrow \quad 4x - 3 = \pm\sqrt{16}$$
$$\Leftrightarrow \quad 4x - 3 = 4 \quad \text{atau} \quad 4x - 3 = -4$$
$$\Leftrightarrow \quad 4x = 7 \quad \text{atau} \quad 4x = -1$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{7}{4} \quad \text{atau} \quad x = -\frac{1}{4}$$

Cara lain:

a. $9x^2 = 100$

$9x^2 - 100 = 0$

$(3x-10)(3x+10) = 0$

$3x - 10 = 0 \;\vee\; 3x + 10 = 0$

$3x = 10 \qquad 3x = -10$

$x = \frac{10}{3} \qquad x = -\frac{10}{3}$

Untuk contoh (b) coba kamu kerjakan sendiri.

Secara umum, bentuk $(x+y)^2$ dan $(x-y)^2$ disebut kuadrat sempurna.

Ingat: $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ dan $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$!

Berarti, $x^2 + 2xy + y^2$ dan $x^2 - 2xy + y^2$ juga bentuk kuadrat sempurna.

Perhatikan dua bentuk kuadrat sempurna berikut!

(i) $x^2 + 14x + 49 = (x+7)^2$

(ii) $x^2 - 18x + 81 = (x-9)^2$

Setiap bentuk persamaan kuadrat dapat diubah menjadi bentuk kudrat sempurna dengan menambah atau mengurangi konstanta.

Bagaimana hubungan 7 dengan 14 pada (i) serta 9 dengan 18 pada (ii)?

Langkah-langkah penyelesaian persamaan kuadrat dengan melengkapkan kuadrat sempurna ialah sebagai berikut.

1. Tempatkan suku-suku yang mengandung peubah (variabel) di ruas kiri dan konstanta di ruas kanan!

Secara umum melengkapkan kuadrat sempurna adalah membentuk persamaan menjadi:

$(x+p)^2 = q^2$

$\Leftrightarrow x + p = \pm q$

Sehingga diperoleh

$x_1 = q - p$ dan $x_2 = -q - p$

2. Koefisien x^2 harus satu!
3. Tambahkan kedua ruas dengan kuadrat dari setengah koefisien x, sehingga ruas kiri menjadi kuadrat sempurna!

Contoh soal 3:

Selesaikan $x^2 + 6x - 16 = 0$!

Jawab:

$$x^2 + 6x - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x = 16 \qquad \text{(langkah 1)}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + \left(\frac{1}{2} \times 6\right)^2 = 16 + \left(\frac{1}{2} \times 6\right)^2 \qquad \text{(langkah 3)}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 3^2 = 16 + 3^2$$

$$\Leftrightarrow (x + 3)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow x + 3 = \pm\sqrt{25}$$

$$\Leftrightarrow x + 3 = \pm 5$$

$$\Leftrightarrow x + 3 = 5 \quad \text{atau} \quad x + 3 = -5$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \quad \text{atau} \quad x = -8$$

Cara lain:

$x^2 + 6x - 16 = 0$

$(x+8)(x-2) = 0$

$x + 8 = 0 \;\vee\; x - 2 = 0$

$x = -8 \qquad x = 2$

Contoh soal 4:

Tentukan himpunan penyelesaian dari $3x^2 + 20x - 7 = 0$!

Jawab:

$$3x^2 + 20x - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 20x = 7 \qquad \text{(langkah 1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}(3x^2 + 20x) = \frac{1}{3} \times 7 \qquad \text{(langkah 2)}$$

Kedua ruas dikalikan $\frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{20}{3}x = \frac{7}{3}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{20}{3}x + \left(\frac{1}{2} \times \frac{20}{3}\right)^2 = \frac{7}{3} + \left(\frac{1}{2} \times \frac{20}{3}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{20}{3}x + \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{7}{3} + \left(\frac{10}{3}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{10}{3}\right)^2 = \frac{7}{3} + \frac{100}{9}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{10}{3}\right)^2 = \frac{21}{9} + \frac{100}{9}$$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{10}{3}\right)^2 = \frac{121}{9}$

$\Leftrightarrow x + \frac{10}{3} = \pm\sqrt{\frac{121}{9}}$

$\Leftrightarrow x + \frac{10}{3} = \pm\frac{11}{3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{11}{3} - \frac{10}{3}$ atau $x = -\frac{11}{3} - \frac{10}{3}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ atau $x = -7$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\left\{-7, \frac{1}{3}\right\}$.

Cara lain dengan pemfaktoran:

$3x^2 + 20x - 7 = 0$

$(3x - 1)(x + 7) = 0$

$3x - 1 = 0 \lor x + 7 = 0$

$3x = 1 \qquad x = -7$

$x = \frac{1}{3}$

LATIHAN 2

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan-persamaan berikut!
   a. $x^2 = 64$ b. $4x^2 = 25$
   c. $4x^2 + 900 = 0$ d. $25x^2 - 144 = 0$
   e. $(x-3)^2 = 100$ f. $(x-4)^2 - 36 = 0$
   g. $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = 25$ h. $(2-5x)^2 - 49 = 0$

2. Lengkapilah bentuk-bentuk berikut!
   a. $x^2 + 2x + \ldots = (x + \ldots)^2$
   b. $x^2 - 6x + \ldots = (x - \ldots)^2$
   c. $x^2 + 12x + \ldots = (x + \ldots)^2$
   d. $x^2 + \ldots + \frac{25}{4} = (x + \ldots)^2$
   e. $x^2 + \ldots + 16 = (x + \ldots)^2$
   f. $x^2 - \ldots + \frac{81}{4} = (x - \ldots)^2$

3. Bilangan berapa harus ditambahkan kepada bentuk-bentuk berikut ini agar menjadi kuadrat sempurna?
   a. $x^2 + 18x$ b. $x^2 - 12x$
   c. $x^2 + \frac{1}{2}x$ d. $x^2 - \frac{3}{7}x$
   e. $x^2 - \frac{2}{3}x$ f. $x^2 + \frac{5}{6}x$
   g. $x^2 - px$ h. $x^2 + \frac{3}{4}x$
   i. $x^2 + 11x$ j. $x^2 + \frac{1}{2}qx$

4. Selesaikan persamaan kuadrat berikut ini dengan cara melengkapkan kuadrat sempurna!
   a. $x^2 - 4x - 5 = 0$
   b. $x^2 - 10x + 24 = 0$
   c. $x^2 + 4x - 21 = 0$
   d. $-x^2 + 2x + 10 = 0$
   e. $2x^2 - 3x - 5 = 0$
   f. $2x^2 + 5x - 3 = 0$
   g. $-2x^2 - x + 1 = 0$
   h. $4x^2 + 4x - 15 = 0$
   i. $3x^2 - 4x - 4 = 0$
   j. $4x^2 - 2x - 5 = 0$

7.4 Penyelesaian Persamaan Kuadrat dengan Rumus

Menyelesaikan persamaan kuadrat dengan rumus biasanya digunakan apabila kita mengalami kesulitan untuk menyelesaikan dengan cara memfaktorkan atau melengkapkan kuadrat sempurna.

Bentuk $ax^2 + bx + c = 0$, jika diselesaikan dengan cara melengkapkan kuadrat akan diperoleh sebagai berikut!

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad ax^2 + bx = -c \qquad \text{(langkah 1)}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \qquad \text{(langkah 2)}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{1}{2} \times \frac{b}{a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{1}{2} \times \frac{b}{a}\right)^2 \qquad \text{(langkah 3)}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Jadi, akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dapat dicari menggunakan rumus abc, yaitu:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Contoh soal 5:

Tentukan himpunan penyelesaian dari $2x^2 + 9x - 5 = 0$!

Jawab:

Dari $2x^2 + 9x - 5 = 0$, diketahui $a = 2$, $b = 9$, dan $c = -5$. Maka,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4(2)(-5)}}{2(2)}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-9 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{-9 \pm 11}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-9+11}{4} \quad \text{atau} \quad x = \frac{-9-11}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \quad \text{atau} \quad x = -5$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\left\{-5, \frac{1}{2}\right\}$.

Cara lain dengan pemfaktoran:

$$2x^2 + 9x - 5 = 0$$
$$(2x - 1)(x + 5) = 0$$
$$2x - 1 = 0 \quad \vee \quad x + 5 = 0$$
$$2x = 1 \qquad x = -5$$
$$x = \frac{1}{2}$$

Contoh soal 6:

Tentukan himpunan penyelesaian dari $3x^2 - 4x = 5$!

Jawab:

$3x^2 - 4x = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 4x - 5 = 0$

Diketahui: $a = 3$, $b = -4$, dan $c = -5$. Maka,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(3)(-5)}}{2(3)} = \frac{4 \pm \sqrt{76}}{6}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{4 + 2\sqrt{19}}{6} \quad \text{atau} \quad x = \frac{4 - 2\sqrt{19}}{6}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{19} \quad \text{atau} \quad x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{19}$$

Jadi, himpunan penyelesaian dari $3x^2 - 4x = 5$ adalah $\left\{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{19}, \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{19}\right\}$.

LATIHAN 3

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

1. Selesaikan persamaan-persamaan berikut ini dengan menggunakan rumus!
   a. $2x^2 + 5x + 2 = 0$
   b. $2x^2 + 5x = 3$
   c. $4x^2 = 3(4x + 5)$
   d. $5 + 3x - 2x^2 = 0$
2. Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan kuadrat di bawah ini untuk $x \in R$!
   a. $2(x^2 - 10) = 3x$
   b. $9(1 + x) - 4x^2 = 0$
   c. $\frac{10}{x+5} = \frac{10}{x} - 1$
   d. $\frac{4}{x-1} - \frac{3}{x+1} - \frac{1}{2} = 0$

e. $x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = 0$

f. $2x^2 - px + 9 = 0$

3. Selesaikan persamaan-persamaan berikut ini dan bulatkan hasilnya sampai satu tempat desimal!

a. $x^2 + 6x + 4 = 0$

b. $4 - 7x + x^2 = 0$

c. $x + \frac{1}{x} - 4 = 0$

d. $-x^2 + 2x + 6 = 0$

e. $5x^2 - 12x = 8$

f. $3x^2 = 3(4x + 5)$

g. $-4x^2 - 6x + 5 = 0$

7.5 Persamaan Kuadrat Berbentuk Pecahan

Seringkali, suatu persamaan kuadrat ditulis dalam bentuk pecahan. Untuk memudahkan menyelesaikan persamaan kuadrat tersebut, terlebih dahulu menghilangkan penyebut-penyebutnya, yaitu dengan mengalikan setiap suku dengan KPK penyebut.

Contoh soal 7:

Selesaikan $1\frac{1}{2}x^2 - 1\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} = 0$!

Jawab:

$$1\frac{1}{2}x^2 - 1\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\left(1\frac{1}{2}x^2 - 1\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}\right) = 4(0) \text{ (KPK dari penyebut (2 dan 4) adalah 4)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 6x^2 - 7x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (2x - 3)(3x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x - 3 = 0 \quad \text{atau} \quad 3x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{2} \quad \text{atau} \quad x = -\frac{1}{3}$$

Contoh soal 8:

Tentukan himpunan penyelesaian dari $x + \frac{4}{x} = \frac{4 + 3x}{x}$!

Jawab:

$$x + \frac{4}{x} = \frac{4 + 3x}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad x\left(x + \frac{4}{x}\right) = x\left(\frac{4 + 3x}{x}\right) \text{ (KPK dari penyebut (} x \text{ dan } x \text{) adalah } x\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 4 = 4 + 3x$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 4 - 3x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x(x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ atau } x = 3$$

Dalam hal ini, $x = 0$ tidak memenuhi, karena jika disubstitusikan pada persamaan $x + \frac{4}{x} = \frac{4+3x}{x}$, diperoleh bentuk $0 + \frac{4}{0} = \frac{4}{0}$. Sedangkan, membagi dengan nol tidak didefinisikan. Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{3\}$.

LATIHAN 4

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

1. $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 0$
2. $\frac{x}{3} = \frac{x+6}{x}$
3. $x - 6 + \frac{5}{x} = 0$
4. $2y - \frac{12}{y} = 5$
5. $\frac{3y}{4} - \frac{1}{y} = y$
6. $\frac{3x-1}{4} = \frac{1}{3x-1}$
7. $\frac{1}{x-2} = \frac{1}{10} + \frac{1}{x+3}$
8. $\frac{2y-1}{2y+1} = \frac{y+2}{3y-2}$
9. $\frac{1}{(x+1)^2} - 21 = \frac{4}{x+1}$
10. $\frac{2y^2}{y+1} = \frac{2}{y+1} - 1$

7.6 Menyusun Persamaan Kuadrat yang Diketahui Akar-akarnya

Apabila akar-akar suatu persamaan kuadrat telah diketahui, maka persamaan kuadrat tersebut dapat disusun dengan dua cara sebagai berikut.

7.6.1 Memakai faktor

Jika persamaan kuadrat dapat difaktorkan menjadi $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ maka x_1 dan x_2 merupakan akar-akar persamaan kuadrat tersebut. Sebaliknya, jika x_1 dan x_2 merupakan akar-akar persamaan kuadrat maka persaman kuadrat itu dapat dinyatakan sebagai:

$$\boxed{(x - x_1)(x - x_2) = 0}$$

Contoh soal 9:

Tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya diketahui sebagai berikut!

a. 2 dan 3

b. -5 dan 1

c. $\frac{1}{2}$ dan $\frac{2}{3}$

d. $-\frac{2}{3}$ dan $\frac{3}{2}$

Jawab:

a. Diketahui: $x_1 = 2$ dan $x_2 = 3$. Maka:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Menyusun persamaan kuadrat yang baru dari akar-akar x_1 dan x_2 dari persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c$ yang diketahui.

Misalkan p bilangan bulat, $p \neq 0$

- untuk kasus p lebihnya, akar baru $(x_1 + p)$ dan $(x_2 + p)$, misalkan $x = y - p$ persamaan kuadrat barunya diperoleh:

  $a(y-p)^2 + b(y-p) + c = 0$
- untuk kasus p kurangnya, akar barunya $(x_1 - p)$ dan $(x_2 - p)$, misalkan $x = y + p$ persamaan kuadrat barunya diperoleh:

  $a(y+p)^2 + b(y+p) + c = 0$
- untuk kasus p kali, akar baru $(x_1 \cdot p)$ dan $(x_2 \cdot p)$, misalkan $x = \frac{y}{p}$ persamaan kuadrat barunya diperoleh:

  $a\left(\frac{y}{p}\right)^2 + b\left(\frac{y}{p}\right) + c = 0$
- untuk kasus kebalikan x_1 dan x_2, akar barunya $\frac{1}{x_1}$ dan $\frac{1}{x_2}$, misalkan $x = \frac{1}{y}$ persamaan kuadrat barunya diperoleh:

  $a\left(\frac{1}{y}\right)^2 + b\left(\frac{1}{y}\right) + c = 0$ atau

  $cy^2 + by + a = 0$
- untuk kasus kuadrat dari x_1 dan x_2, akar barunya $(x_1)^2$ dan $(x_2)^2$, misalkan $x = \sqrt{y}$ persamaan kuadrat barunya diperoleh:

  $a(\sqrt{y})^2 + b(\sqrt{y}) + c = 0$ atau

  $a^2 y + (2ay - b^2)y + c^2 = 0$

Sumber: http://kowi886444.wordpress.com

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

Jadi, persamaan kuadratnya adalah $x^2 - 5x + 6 = 0$.

b. Diketahui: $x_1 = -5$ dan $x_2 = 1$. Maka:

$$(x - (-5))(x - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x+5)(x-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$$

Jadi, persamaan kuadratnya adalah $x^2 + 4x - 5 = 0$.

c. Diketahui: $x_1 = \frac{1}{2}$ dan $x_2 = \frac{2}{3}$. Maka:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right)x + \frac{1}{3} = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{1}{3} = 0$$
$$\Leftrightarrow 6x^2 - 7x + 2 = 0$$

Jadi, persamaan kuadratnya adalah $6x^2 - 7x + 2 = 0$.

d. Diketahui: $x_1 = -\frac{2}{3}$ dan $x_2 = \frac{3}{2}$. Maka:

$$\left(x - \left(-\frac{2}{3}\right)\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2}\right)x - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{5}{6}x - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow 6x^2 - 5x - 6 = 0$$

Jadi, persamaan kuadratnya adalah $6x^2 - 5x - 6 = 0$.

7.6.2 Memakai rumus jumlah dan hasil kali akar-akar

A. Jumlah akar-akar persamaan kuadrat

Jika x_1 dan x_2 akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, maka:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

Jadi, $\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$

B. Hasil kali akar-akar persamaan kuadrat

Jika x_1 dan x_2 akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, maka:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2}{(2a)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - \left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{4ac}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Jadi, $\boxed{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$

Persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan $a \neq 0$, dapat dinyatakan sebagai $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, yaitu dengan membagi kedua ruas persamaan kuadrat semula dengan a.

Sedangkan berdasarkan rumus jumlah dan hasil kali akar-akar, terdapat hubungan:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b}{a} = -\left(x_1 + x_2\right)$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2$$

Dengan demikian, persamaan $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, dapat dinyatakan sebagai:

$$\boxed{x^2 - \left(x_1 + x_2\right)x + x_1 \cdot x_2 = 0}$$

Faktorisasi (memfaktorkan) dalam menyelesaikan persamaan kuadrat, dapat dilakukan dengan tiga cara:

- dengan menemukan faktor persekutuan dari suku-sukunya.

  Contoh:

  $2x^2 + 6x = 0$

  $2x(x+3) = 0$

  $2x = 0$ atau $x + 3 = 0$

  ($2x$ adalah faktor persekutuan)

- dengan mengumpulkan dan mengelompokkan suku senama.

  Contoh:

  $2x^2 + 3 = 6 - x$

  $\Leftrightarrow 2x^2 + x - 6 + 3 = 0$

  $\Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 = 0$

  $\Leftrightarrow (2x + 3)(x - 1) = 0$

  $2x + 3 = 0$ atau $x - 1 = 0$

- dengan menggunakan identitas

  $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

  Contoh:

  $16x^2 - 9 = 0$

  $\Leftrightarrow 4^2x^2 - 3^2 = 0$

  $\Leftrightarrow (4x)^2 - 3^2 = 0$

  $\Leftrightarrow (4x + 3)(4x - 3) = 0$

  $4x + 3 = 0$ atau $4x - 3 = 0$

Sumber: Ensiklopedia Matematika (ST. Negoro dan B. Harahap)

Contoh soal 10:

Tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya diketahui sebagai berikut!

a. 2 dan 3

b. -5 dan 1

c. $\frac{1}{2}$ dan $\frac{2}{3}$

d. $-\frac{2}{3}$ dan $\frac{3}{2}$

Jawab:

a. Diketahui: $x_1 = 2$ dan $x_2 = 3$. Maka:

$x_1 + x_2 = 2 + 3 = 5$

$x_1 \cdot x_2 = (2)(3) = 6$

Sehingga,

$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

Jadi, persamaan kuadratnya adalah $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Cara lain:

$x_1 = 2$ dan $x_2 = 3$

$(x - x_1)(x - x_2) = 0$

$(x - 2)(x - 3) = 0$

$x^2 - 3x - 2x + 6 = 0$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

b. Diketahui: $x_1 = -5$ dan $x_2 = 1$. Maka:

$x_1 + x_2 = -5 + 1 = -4$

$x_1 \cdot x_2 = (-5)(1) = -5$

Sehingga,

$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - (-4)x + (-5) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$

Jadi, persamaan kuadratnya adalah $x^2 + 4x - 5 = 0$.

Cara lain:

$x_1 = -5$ dan $x_2 = 1$

$(x - x_1)(x - x_2) = 0$

$(x + 5)(x - 1) = 0$

$x^2 - x + 5x - 5 = 0$

$x^2 + 4x - 5 = 0$

c. Diketahui: $x_1 = \frac{1}{2}$ dan $x_2 = \frac{2}{3}$. Maka:

$x_1 + x_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$

$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$

Sehingga,

$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{1}{3} = 0$

$\Leftrightarrow 6x^2 - 7x + 2 = 0$

Jadi, persamaan kuadratnya adalah $6x^2 - 7x + 2 = 0$.

Cara lain:

$x_1 = \frac{1}{2}$ dan $x_2 = \frac{2}{3}$

$(x - x_1)(x - x_2) = 0$

$\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) = 0$

$x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}x + \frac{2}{6} = 0$

$x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{2}{6} = 0$

$6x^2 - 7x + 2 = 0$

d. Diketahui: $x_1 = -\frac{2}{3}$ dan $x_2 = \frac{3}{2}$. Maka:

$x_1 + x_2 = -\frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{5}{6}$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = -1$$

Sehingga,

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ x^2 - \frac{5}{6}x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ 6x^2 - 5x - 6 = 0$$

Jadi, persamaan kuadratnya adalah $6x^2 - 5x - 6 = 0$.

Cara lain:

$x_1 = -\frac{2}{3}$ dan $x_2 = \frac{3}{2}$

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}x - 1 = 0$$

$$x^2 - \frac{5}{6}x - 1 = 0$$

$$6x^2 - 5x - 6 = 0$$

LATIHAN 5

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

1. Dengan cara faktor, tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya diketahui sebagai berikut!
   a. 1 dan 4 b. −3 dan 2
   c. −2 dan −5 d. $\frac{1}{2}$ dan 6
   e. $\frac{3}{4}$ dan $-\frac{4}{5}$ f. $-\frac{1}{3}$ dan $-\frac{3}{5}$
   g. − 2 akar 3 dan − 4 akar 3
2. Dengan rumus jumlah dan hasil kali akar-akar, susunlah persamaan kuadrat yang akar-akarnya diketahui sebagai berikut!
   a. 2 dan 5 b. −2 dan 3
   c. −1 dan −4 d. $\frac{2}{3}$ dan 6
   e. $\frac{5}{6}$ dan $-\frac{3}{5}$ f. $-\frac{11}{3}$ dan $-1\frac{3}{5}$
   g. akar 5 dan −2 akar 5
   h. $p + 2$ dan $p - 2$
3. Tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya 2 lebihnya dari akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + 4x + 3 = 0$!
4. Susunlah persamaan kuadrat yang akar-akarnya 3 kali akar-akar persamaan kuadrat $2x^2 + 5x - 3 = 0$!
5. Tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya kuadrat dari akar-akar persamaan kuadrat $3x^2 + 7x + 2 = 0$!

7.7 Penerapan Persamaan Kuadrat

Soal-soal cerita yang berkaitan dengan persamaan kuadrat dapat diselesaikan dengan persamaan kuadrat dengan cara mengubah dulu soal-soal cerita tersebut ke bentuk persamaan kuadrat. Perhatikan contoh berikut!

Contoh soal 11:

Selisih dua bilangan cacah adalah 7 dan hasil kalinya 120. Tentukan kedua bilangan cacah itu!

Jawab:

Misalkan: bilangan cacah I adalah n

bilangan cacah II adalah $n + 7$

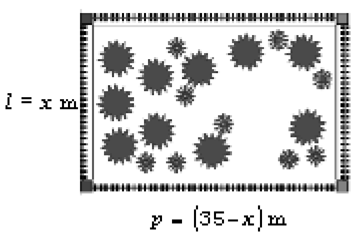
Hasil kalinya adalah $n(n+7)$.

Penyelesaian:

$$n(n+7)=120$$
$$\Leftrightarrow n^2+7n=120$$
$$\Leftrightarrow n^2+7n-120=0$$
$$\Leftrightarrow (n+15)(n-8)=0$$
$$\Leftrightarrow n+15=0 \quad \text{atau} \quad n-8=0$$
$$\Leftrightarrow n=-15 \quad \text{atau} \quad n=8$$
(tak memenuhi) (memenuhi)

Jadi, bilangan cacah I adalah 8 dan
bilangan cacah II adalah $8+7=15$.

Contoh soal 12:



Keliling sebidang tanah yang berbentuk persegi panjang adalah 70 m dan luasnya 300 m^2. Tentukan panjang dan lebar persegi panjang tersebut!

Jawab:

Misalkan: lebar = x m

panjang $= (35-x)$ m (mengapa?)

luas $= x(35-x)\ m^2$

Penyelesaian: $x(35-x)=300$
$$\Leftrightarrow 35x-x^2=300$$
$$\Leftrightarrow -x^2+35x-300=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-35x+300=0$$
$$\Leftrightarrow (x-15)(x-20)=0$$
$$\Leftrightarrow x-15=0 \quad \text{atau} \quad x-20=0$$
$$\Leftrightarrow x=15 \quad \text{atau} \quad x=20$$

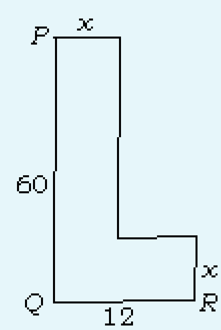
Jadi, lebar persegi panjang adalah 15 m dan
panjangnya $(35-15)\text{m}=20\text{m}$.

LATIHAN 6

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

1. Jumlah dua bilangan cacah adalah 30 dan hasil kalinya adalah 221. Tentukan kedua bilangan cacah tersebut!
2. Dua bilangan cacah berselisih 6 dan hasil kalinya 216. Tentukan kedua bilangan cacah tersebut!
3. Sebuah taman berbentuk persegi panjang. Kelilingnya 60 m dan luasnya 224 m^2. Misalkan lebar taman x m, maka:
   a. nyatakan panjangnya dalam x;
   b. bentuklah persamaan kuadrat dalam x;
   c. selesaikan dan tentukan panjang serta lebar taman tersebut!

4. Sebuah segitiga mempunyai alas x cm, sedangkan tingginya 5 cm lebih panjang dari alas. Jika luasnya 88 cm^2, berapa cm alasnya?
5. Sebuah tangga yang panjangnya $(x+6)$ m bersandar pada tembok. Jarak kaki tangga ke tembok adalah x meter dan tinggi ujung tangga dari lantai $(x+3)$ m. Bentuklah persamaan kuadrat dalam x, kemudian selesaikan dan hitunglah panjang tangga tersebut!
6. Jumlah n bilangan asli yang pertama dirumuskan $s = \frac{1}{2}n(n+1)$. Tentukan banyaknya bilangan asli yang berurutan, mulai dari 1 jika hasil penjumlahan bilangan asli adalah 120!
7. Sebuah bola dilemparkan ke atas. Tinggi bola setelah t detik dirumuskan dengan $h(t) = 25t - 5t^2$. Hitunglah t jika tinggi bola 20 m! Mengapa ada dua jawaban?
8. Selisih sebuah bilangan dengan kebalikannya adalah $\frac{9}{20}$. Tentukan bilangan tersebut!
9. Jumlah sebuah bilangan dengan kebalikannya adalah $\frac{25}{12}$. Tentukanlah bilangan tersebut!
10. Diketahui persamaan kurva $x^2 + y^2 - 10x + 11y + 24 = 0$. Tentukan koordinat titik potong kurva itu dengan:
    a. sumbu X; b. sumbu Y!
11. Sebuah peti kemas berbentuk balok, volumnya 80 m^3. Tentukan ukuran alas peti kemas tersebut jika panjangnya 3 m lebih panjang dari lebarnya dan tingginya 2 m!
12. Luas sebuah kebun yang berbentuk persegi panjang adalah 2.925 m^2. Panjangnya 20 m lebih panjang dari lebarnya. Berapa panjang dan lebar kebun itu?
13. Panjang sisi-sisi segitiga siku-siku adalah $(x+3)$ cm, $(x-1)$ cm, dan $(x-5)$ cm.
    a. Berapa panjang sisi miringnya?
    b. Bentuklah persaman kuadrat dalam x!
    c. Tentukan ukuran sisi segitiga tersebut!
    d. Hitunglah luas segitiga tersebut!
14. Jika $x = 1$ merupakan penyelesaian persamaan $(4x^2 - 1) - 3(5x - p - 10) = 53$, tentukan p!
15. Gambar di bawah ini adalah lempeng logam berbentuk L yang lebarnya tetap, yaitu x cm. $PQ = 60$ cm dan $QR = 12$ cm. Jika luas lempeng logam A cm^2 maka:
    a. tunjukkan bahwa $A = -x^2 + 72x$;
    b. tentukan x jika $A = 225$ cm^2!



7.8 Fungsi Kuadrat

Dalam buku jilid 2, telah kita pelajari fungsi linear dan grafiknya. Kini akan kita pelajari lebih lanjut fungsi kuadrat dan grafiknya sebagai berikut.

Suatu fungsi f pada himpunan bilangan real (R) yang ditentukan oleh:

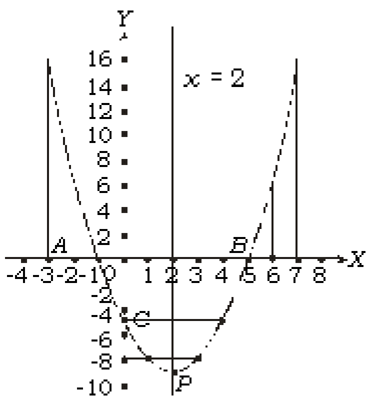
$f(x) = ax^2 + bx + c$ dengan $a, b, c \in R$ dan $a \neq 0$ disebut *fungsi kuadrat*.

7.8.1 Menggambar grafik fungsi kuadrat

Grafik fungsi kuadrat dapat digambarkan dengan bantuan tabel koordinat beberapa titik pada grafik tersebut. Perhatikan contoh berikut!

Akan digambar grafik $f(x) = x^2 - 4x - 5$ pada himpunan R dengan daerah asal $\{x \mid -3 \le x \le 7, x \in R\}$. Dibuat tabel sebagai berikut.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
x^2	9	4	1	0	1	4	9	16	25	36	49
$-4x$	12	8	4	0	−4	-8	-12	-16	-20	-24	-28
-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5
$f(x)$	16	7	0	-5	-8	-9	-8	-5	0	7	16



Gambar 7.2
$f(x) = x^2 - 4x - 5$

Digambar titik-titik: $(-3,16)$, $(-2,7)$, $(-1,0)$, $(0,-5)$, $(1,-8)$, $(2,-9)$, $(3,-8)$, $(4,-5)$, $(5,0)$, $(6,7)$, dan $(7,16)$ pada koordinat Cartesius. Kemudian, titik-titik itu dihubungkan dengan kurva mulus sehingga didapatkan grafik seperti gambar di samping.

Grafik fungsi kuadrat tersebut berupa parabola. Perhatikan beberapa hal berikut!

a. Untuk $x = -1$ dan $x = 5$, $f(-1) = 0$ dan $f(5) = 0$. Sehingga, $x = -1$ dan $x = 5$ disebut *pembuat nol* fungsi. Pembuat nol fungsi adalah anggota daerah asal yang membuat $f(x) = 0$.

b. Garis $x = 2$ membagi dua parabola secara simetris. Oleh karena itu, garis $x = 2$ disebut *sumbu simetri* parabola. Persamaan sumbu simetri parabola dapat ditentukan dengan menghitung rata-rata pembuat nol fungsi, yaitu garis $x = \frac{-1+5}{2} = 2$.

c. Parabola di sebelah kiri sumbu simetri (garis $x = 2$) menurun sampai pada suatu titik (P), kemudian naik ketika letaknya di sebelah kanan sumbu simetri. Titik P disebut titik balik minimum parabola dan dicapai untuk $x = 2$. Ternyata, $f(2) = -9$. Nilai -9 merupakan nilai minimum fungsi. Dikatakan bahwa nilai minimum grafik adalah -9. Secara mudah, dapat diingat bahwa nilai minimum merupakan ordinat dari koordinat titik balik $P(2,-9)$.

d. Dengan memperhatikan daerah asal, daerah hasil fungsi dapat ditentukan sebagai berikut.
Telah dijelaskan bahwa nilai minimum fungsi adalah -9, sehingga -9 merupakan batas bawah. Untuk menentukan batas atas, perhatikan $f(-3)$ dan $f(17)$. Ternyata, $f(-3) = 16$ dan $f(17) = 16$. Nilai 16 merupakan nilai maksimum fungsi untuk daerah asal yang ditentukan. Jadi, daerah hasil adalah: $\{y \mid -9 \le y \le 16, y \in R\}$.

e. Titik potong dengan sumbu X, syaratnya $f(x)=0$. Ternyata, $x=-1$ atau $x=5$ membuat $f(x)=0$ atau $y=0$. Jadi, titik potong dengan sumbu X adalah $A(-1,0)$ dan $B(5,0)$.

f. Titik potong dengan sumbu Y, syaratnya $x=0$. Untuk $x=0$ didapatkan $y=-5$. Jadi, titik potong dengan sumbu Y adalah $C(0,-5)$.

LATIHAN 7

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

1. Ditentukan fungsi $f(x)=x^2-25$ dengan daerah asal $\{x \mid -6 \le x \le 6, x \in R\}$.
   a. Buatlah tabel fungsi $f(x)$!
   b. Gambarlah grafik fungsi $f(x)$!
   c. Tentukan:
      (i) titik potong dengan sumbu X;
      (ii) persamaan sumbu simetri parabola;
      (iii) titik potong dengan sumbu Y;
      (iv) koordinat titik balik;
      (v) nilai minimum fungsi;
      (vi) daerah hasil fungsi!
3. Diketahui $f(x)=-x^2-2x+3$ dengan daerah asal $\{x \mid -5 \le x \le 3, x \in R\}$.
   a. Lengkapilah tabel berikut!

x	-5	−4	-3	-2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	-12								

   b. Gambarlah grafik $f(x)=-x^2-2x+3$!
   c. Tentukan:
      (i) titik potong dengan sumbu X;
      (ii) persamaan sumbu simetri;
      (iii) koordinat titik balik;
      (iv) nilai maksimum fungsi;
      (v) titik potong dengan sumbu Y;
      (vi) daerah hasil fungsi!
4. Gambarlah grafik fungsi-fungsi berikut!
   a. $y=x^2+4x+3$ dengan daerah asal $\{x \mid -6 \le x \le 2, x \in R\}$
   b. $y=x^2+2x-3$ dengan daerah asal $\{x \mid -5 \le x \le 3, x \in R\}$
   c. $y=(x-2)(x+4)$ dengan daerah asal $\{x \mid -6 \le x \le 4, x \in R\}$
   d. $y=-x^2+2x+24$ dengan daerah asal $\{x \mid -5 \le x \le 7, x \in R\}$

7.8.2 Cara lain menggambar grafik fungsi kuadrat

Selain menggunakan tabel grafik $f(x)=ax^2+bx+c$, grafik fungsi kuadrat dapat juga digambar dengan menggunakan pertolongan titik-titik penting yang dilalui oleh grafik tersebut. Titik-titik penting tersebut adalah titik potong grafik dengan sumbu X, titik potong dengan sumbu Y, serta titik balik.

Untuk menentukan titik-titik tersebut, diperlukan cara penyelesaian yang berkaitan dengan persamaan kuadrat.

Langkah-langkah menggambar grafik $f(x)=ax^2+bx+c$ adalah sebagai berikut.

Absis adalah koordinat mendatar suatu titik dalam sistem koordinat Cartesius yang merupakan jarak titik ke sumbu Y dihitung sepanjang garis yang sejajar sumbu X.

Ordinat adalah koordinat suatu titik pada koordinat Cartesius dalam bidang, yang merupakan jarak titik tersebut ke sumbu X dihitung sepanjang garis yang sejajar sumbu Y.

sumbu X

Syarat: $y = f(x) = 0$. Penyelesaian $ax^2 + bx + c = 0$ menggunakan pemfaktoran, sehingga diperoleh nilai x_1 dan x_2. Koordinat titik potongnya adalah $(x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$.

2. ***Mencari titik potong grafik dengan sumbu Y***

Syarat: nilai $x = 0$ atau menentukan $f(0)$. Koordinat titik potongnya adalah $(0, y)$.

3. ***Menentukan pasangan koordinat titik balik, $P(x_p, y_p)$***

Cara 1:

Absis titik P adalah $x_p = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

Ordinat titik P, yaitu y_p, diperoleh dengan mensubstitusikan $x_p = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ ke dalam fungsi kuadrat, yaitu $y_p = f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)$.

Curve tracing process adalah cara menggambar grafik fungsi kuadrat dengan membuat tabel koordinat dari beberapa titik pada $f(x) = ax^2 + bx + c$

Cara 2:

Absis titik P adalah $x_p = \dfrac{-b}{2a}$, disebut juga persamaan sumbu simetri.

Ordinat titik P adalah $y_p = \dfrac{-D}{4a}$, $D = b^2 - 4ac$.

Contoh soal 13:

Gambarlah grafik fungsi $f(x) = x^2 + 4x - 12$ pada himpunan bilangan nyata!

Jawab:

Menggambar grafik fungsi kuadrat dengan mencari titik potong grafik dengan sumbu X dan Y, serta menentukan pasangan koordinat titik balik P (x_p, y_p) disebut cara matematis.

1. Menentukan titik potong dengan sumbu X; $y = f(x) = 0$

$$\begin{aligned} & x^2 + 4x - 12 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x+6)(x-2) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x + 6 = 0 \quad \text{atau} \quad x - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = -6 \quad\quad \text{atau} \quad x = 2 \end{aligned}$$

Jadi, titik potong dengan sumbu X adalah $A(-6, 0)$ dan $B(2, 0)$.

2. Menentukan titik potong dengan sumbu Y; $x = 0$ atau $f(0)$.

$$\begin{aligned} & f(x) = x^2 + 4x - 12 \\ \Leftrightarrow\ & f(0) = 0 + 0 - 12 \\ \Leftrightarrow\ & y = -12 \end{aligned}$$

Jadi, titik potong dengan sumbu Y adalah $C(0, -12)$.

3. Menentukan titik balik $P(x_P, y_P)$

Cara 1:

$$x_P = \frac{-6+2}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$y_P = f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) - 12 = 4 - 8 - 12 = -16$$

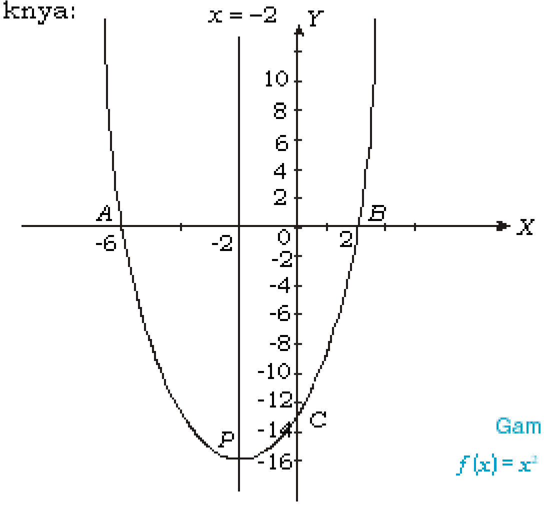
Cara 2:

$$x_P = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$y_P = \frac{-D}{4a} = \frac{-\left(4^2 - 4(1)(-12)\right)}{4(1)} = \frac{-(16+48)}{4} = \frac{-64}{4} = -16$$

Jadi, titik baliknya adalah $P(-2, -16)$.

Grafiknya:



Gambar 7.3
$f(x) = x^2 + 4x - 12$

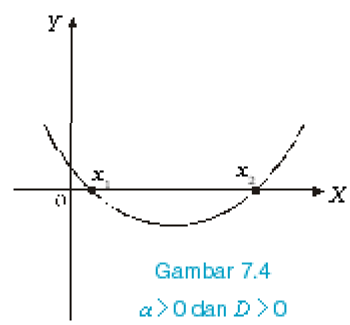
Untuk menggambarkan grafik fungsi $f(x) = x^2 + 4x - 12$ dapat menggunakan bantuan titik-titik x dan y yang dicari terlebih dahulu dengan memasukkan nilai x ke dalam persamaan.

x	y
-2	-16
-1	-15
0	-12
1	-7
2	0
3	9

7.8.3 Bentuk-bentuk grafik $f(x) = ax^2 + bx + c$

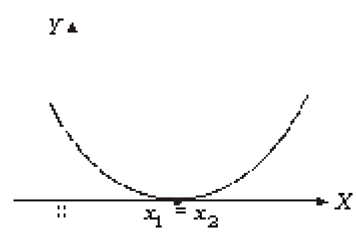
Dengan memperhatikan a (koefisien x^2) dan nilai diskriminan $D = b^2 - 4ac$, grafik $y = ax^2 + bx + c$ mempunyai beberapa kemungkinan sebagai berikut.

1. Jika $a > 0$ dan $D > 0$, grafik memotong sumbu X di dua titik yang berbeda. Jenis titik baliknya minimum.



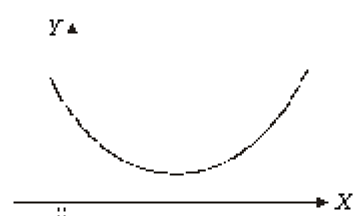
Gambar 7.4
$a > 0$ dan $D > 0$

2. Jika $a > 0$ dan $D = 0$, grafik memotong sumbu X di satu titik (menyinggung sumbu X). Jenis titik baliknya minimum.

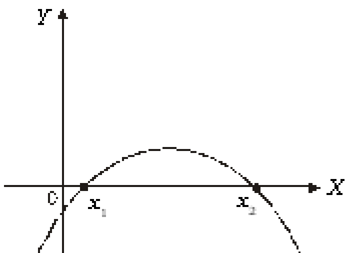


Gambar 7.5
$a > 0$ dan $D = 0$

3. Jika $a > 0$, $D < 0$, grafik tidak memotong sumbu X (dikatakan definit positif). Jenis titik baliknya minimum.

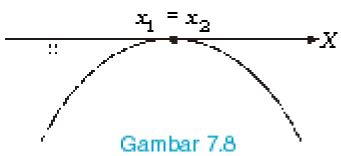


Gambar 7.6
$a > 0$ dan $D < 0$



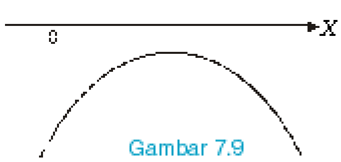
Gambar 7.7
$a < 0$ dan $D > 0$

4. Jika $a < 0$ dan $D > 0$, grafik memotong sumbu X di dua titik yang berbeda. Jenis titik baliknya maksimum.



Gambar 7.8
$a < 0$ dan $D = 0$

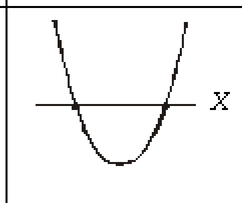
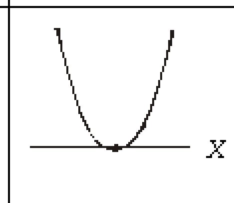
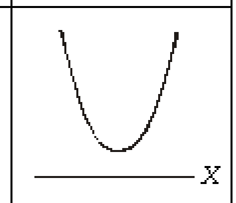
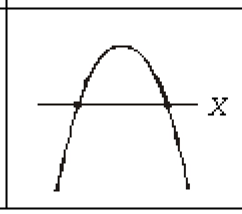
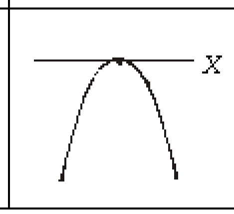
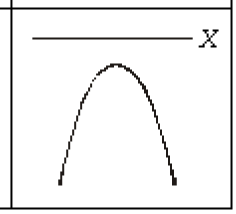
5. Jika $a < 0$ dan $D = 0$, grafik fungsi menyinggung sumbu X. Jenis titik baliknya maksimum.



Gambar 7.9
$a < 0$ dan $D < 0$

6. Jika $a < 0$ dan $D < 0$, grafik tidak memotong sumbu X (dikatakan definit negatif). Jenis titik baliknya maksimum.

Dari penjelasan di atas, dapat dibuat bagan yang lebih sederhana, sebagai berikut.

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

LATIHAN 8

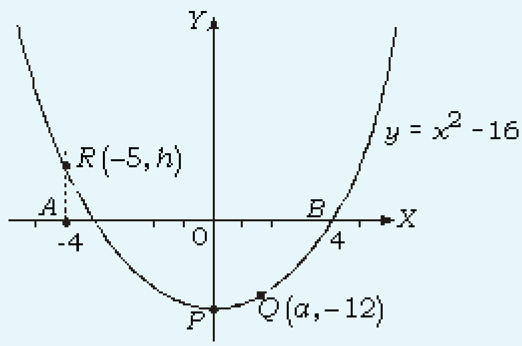
Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

1. Gambarlah grafik fungsi $f(x) = x^2 + 4x - 21$ pada himpunan bilangan nyata!
2. Gambarlah grafik fungsi $y = 18 - 7x - x^2$ pada himpunan bilangan nyata!
3. Gambarlah grafik fungsi $y = 6x^2 - 5x - 6$ pada himpunan bilangan nyata!
4. Kerjakan seperti soal nomor 3 untuk $y = 3 + 10x - 8x^2$!
5. Diketahui fungsi $y = 8x^2 + 2x - 1$ pada himpunan bilangan nyata. Tanpa menggambar grafik fungsi tersebut, tentukan:
   a. pembuat nol fungsi;
   b. persamaan sumbu simetri;
   c. koordinat titik balik!
6. Tentukan persamaan sumbu simetri grafik fungsi berikut!
   a. $y = 8x^2 + 6x - 9$
   b. $y = x^2 + 7x - 8$
   c. $y = -x^2 - x + 30$
   d. $y = 2x^2 - 5x - 7$
   e. $y = 1 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}x^2$
7. Tentukan koordinat titik balik grafik fungsi pada soal nomor 6!
8. Selidiki apakah grafik fungsi berikut memotong sumbu X, menyinggung sumbu X, atau tidak memotong sumbu X!
   a. $y = x^2 + 9x + 20$
   b. $y = x^2 - 4x - 45$
   c. $y = 2x^2 - 3x + 1$
   d. $y = -3x^2 + 2x + 4$
   e. $y = -x^2 + 10x - 25$

f. $y = -2x^2 + 4x - 9$

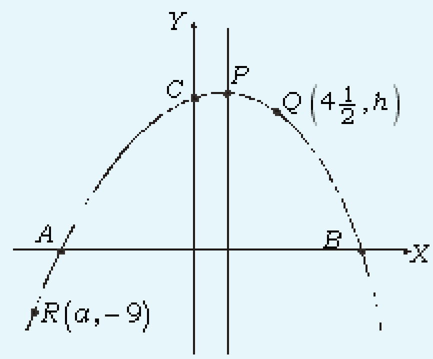
9. Tentukan jenis titik balik grafik fungsi pada soal nomor 8 minimum atau maksimum!

10. Selidiki apakah fungsi-fungsi berikut tergolong definit positif, definit negatif, atau bukan keduanya!
    a. $y = 3x^2 - 4x - 2$
    b. $y = -x^2 + 5x + 6$
    c. $y = 2x^2 - 7x + 9$
    d. $y = -5x^2 + 6x + 5$
    e. $y = 4x^2 - 3x + 5$

11. 

Gambar tersebut menunjukkan grafik fungsi $y = x^2 - 16$. Titik A dan B merupakan titik-titik potong grafik dengan sumbu X. Titik P merupakan titik balik. Titik Q dan R merupakan titik yang terletak pada grafik.
    a. Tentukan koordinat titik A dan titik B!
    b. Tentukan koordinat titik P!
    c. Jika $Q(a, -12)$, tentukan nilai a!
    d. Jika $R(-5, h)$, tentukan nilai h!

12. Gambar di bawah ini menunjukkan grafik fungsi $y = -x^2 + 4x + 12$.



    a. Tentukan koordinat titik A dan B!
    b. Tentukan koordinat titik P!
    c. Tentukan koordinat titik C!
    d. Tentukan persamaan sumbu simetri!
    e. Jika $Q\left(4\frac{1}{2}, h\right)$, tentukan nilai h!
    f. Jika $R(a, -9)$, tentukan nilai a!

Untuk lebih memahami cara menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan fungsi kuadrat, perhatikan contoh berikut!

Contoh soal 14:

Sebuah persegi panjang mempunyai keliling 60 cm. Agar luas persegi panjang itu maksimum, tentukan panjang dan lebarnya! Berapa luas maksimum persegi panjang tersebut?

Jawab:

Keliling = 60 cm

Panjang + lebar = $\frac{1}{2} \times 60$ cm = 30 cm

Misalkan:

Panjang = x cm

Lebar = $(30 - x)$ cm

Luas = $x(30 - x)$

$L(x) = 30x - x^2 = -x^2 + 30x$

Luas maksimum persegi panjang, sama dengan nilai maksimum fungsi $L(x)$.

$$L(x)\text{ maks} = \frac{b^2 - 4ac}{-4a} = \frac{30^2 - 4(-1)(0)}{-4(-1)} = \frac{900}{4} = 225$$

Jadi, luas maksimum persegi panjang adalah 225 cm^2.

$L(x) = -x^2 + 30x$ karena $L(x) = 225$, maka

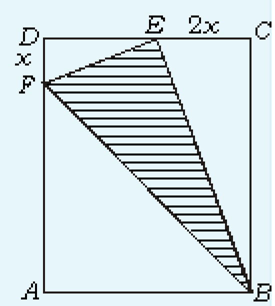
$$\begin{aligned} & -x^2 + 30x = 225 \\ \Leftrightarrow\ & -x^2 + 30x - 225 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 30x + 225 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-15)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x - 15 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 15 \end{aligned}$$

Jadi, panjang persegi panjang adalah 15 cm dan lebarnya $(30-15)$ cm $= 15$ cm. Karena panjang dan lebarnya sama maka disebut juga persegi.

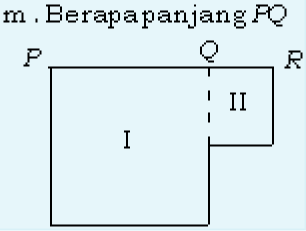
LATIHAN 9

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini pada buku tugasmu!

1. Sebuah persegi panjang, panjangnya x meter dan lebarnya $(6-x)$ meter.
   a. Bentuklah fungsi $L(x)$ yang menyatakan luas persegi panjang tersebut!
   b. Dengan domain $\{x \mid 0 \le x \le 6, x \in R\}$, gambarlah grafik $L(x)$ pada R!
2. Sebuah peluru ditembakkan vertikal ke atas. Setelah t detik, tinggi (dalam meter) dinyatakan sebagai fungsi $h(t) = 10t - 2t^2$.
   a. Buatlah tabel fungsi h dengan daerah asal $\{t \mid -3 \le t \le 3\}$!
   b. Tentukan persamaan sumbu simetri dan h maksimum!
   c. Gambarlah grafik fungsi h!
   d. Setelah berapa detik peluru mencapai tinggi maksimum?
   e. Berapa meter tinggi maksimum yang dicapai peluru?
   f. Tentukan interval waktu di mana tinggi peluru lebih dari 8 m!
3. Gambar di berikut ini menunjukkan sebuah persegi dengan sisi 16 cm. Panjang $DF = x$ cm dan $CE = 2x$ cm. Jika h menyatakan luas segitiga BEF, tunjukkan bahwa $L(x) = 128 - 16x + x^2$! Tentukan nilai x agar luas segitiga BEF minimum!



4. Hitunglah nilai maksimum xy, jika $2x + y = 8$!
5. Hitunglah nilai maksimum $x^2 - y^2$ jika $2x - y = 4$!
6. Dua buah bilangan jumlahnya 72. Tentukan hasil kali maksimum dua bilangan tersebut!
7. Dua buah bilangan selisihnya 30. Tentukan bilangan-bilangan tersebut agar hasil kalinya minimum dan tentukan pula hasil kali tersebut!
8. Bangun di samping terdiri dari dua persegi (persegi I dan II). Diketahui panjang $PR = 12$ cm. Berapa panjang PQ dan QR agar jumlah luasnya minimum?



RANGKUMAN

- Bentuk umum persamaan kuadrat:
  $ax^2 + bx + c = 0$; $a, b, c \in R$ dan $a \neq 0$.
- Cara-cara menyelesaikan persamaan kuadrat, yaitu:
  a. Memfaktorkan
     Jika $A \times B = 0$ maka $A = 0$ atau $B = 0$.
  b. Melengkapkan kuadrat sempurna
     Syarat $a = 1$
     Jika $x^2 + bx + c = 0$ maka
     $$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = -c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$
     $$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = -c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 .$$
  c. Rumus persamaan kuadrat
     $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
- Menyusun persamaan kuadrat
  a. Memakai faktor
     Jika x_1 dan x_2 akar-akar persamaan kuadrat, maka PK:
     $(x - x_1)(x - x_2) = 0$
  b. Memakai rumus jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat
     Jika x_1 dan x_2 akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$,
     $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, dan $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ maka
     PK: $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$
- Fungsi kuadrat adalah fungsi f dari R ke R yang berbentuk $f(x) = ax^2 + bx + c$ dengan $a, b, c \in R$ dan $a \neq 0$.
- Untuk mencari persamaan sumbu simetri digunakan rumus $x = \frac{-b}{2a}$
  Untuk mencari titik puncak digunakan rumus $y = \frac{-D}{4a}$, $D = b^2 - 4ac$.

EVALUASI

I. Pemahaman Konsep

Kerjakanlah soal-soal di bawah ini!

1. Selesaikanlah persamaan-persamaan berikut dengan cara memfaktorkan!
   a. $4x^2 - 49 = 0$ b. $10x^2 + 13x = 3$
   c. $7x^2 = 2 - 13x$ d. $6 + 11x - 10x^2 = 0$
   e. $14 - 17x - 6x^2 = 0$
2. Selesaikan persamaan-persamaan berikut!
   a. $x^2 + 3\frac{1}{2}x - 7\frac{1}{2} = 0$ b. $3x^2 + 8\frac{2}{3}x = 1$
   c. $2x^2 + \frac{1}{10}x - \frac{1}{10} = 0$ d. $2x - \frac{1}{x} = 7\frac{3}{4}$
3. Diketahui fungsi $f(x) = x^2 + 3x - 5$ dengan $x \in R$. Tentukan:
   a. bayangan -2; b. $f\left(\frac{1}{2}\right)$!
4. Diketahui fungsi $f: x \to 5 - 4x$ dengan $x \in \{x \mid x \leq 5, x \in \text{asli}\}$. Tentukan:
   a. domain fungsi; b. range fungsi!
5. Diketahui fungsi $f(x) = 36 - x^2$ dengan domain $\{x \mid -7 \leq x \leq 7, x \in R\}$. Tentukan:
   a. domain dengan menyebut anggota-anggotanya;
   b. range fungsi!
6. Diketahui fungsi $g: x \to x^2 + 9x$ dengan $x \in R$.
   a. Tulislah rumus fungsi g!

b. Tentukan $g(-2)$, $g(-1)$, $g(2)$, $g\left(\frac{1}{2}\right)$, $g\left(\frac{3}{4}\right)$!

c. Bila $g(x) = -18$, tentukan x!

II. Penalaran dan Komunikasi

Selesaikanlah soal-soal di bawah ini!

1. Tentukan nilai b jika 2 merupakan salah satu penyelesaian dari $6x^2 - bx - 2 = 0$! Tentukan juga penyelesaian yang lain!
2. Diketahui 10 adalah salah satu akar persamaan $x^2 + 30 = a(3x - a + 1)$. Tentukanlah nilai a!
3. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan-persamaan berikut dengan cara melengkapkan kuadrat sempurna!
   a. $x^2 + 11x + 28 = 0$
   b. $8x^2 + 26x - 7 = 0$
   c. $6 - 17x - 3x^2 = 0$
4. Tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya:
   a. 4 dan 5;
   b. -5 dan 3;
   c. $\frac{5}{6}$ dan $-\frac{6}{5}$;
   d. akar 6 dan 2 akar 6!
5. Susunlah persamaan kuadrat yang akar-akarnya 4 lebihnya dari akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + 3x + 2 = 0$!
6. Tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya 2 kurangnya dari akar-akar persamaan kuadrat $2x^2 - 5x + 3 = 0$!
7. Fungsi h ditentukan dengan rumus $h(x) = ax + b$, a dan b bilangan bulat. Jika $h(2) = -4$ dan $h(-3) = 6$, tentukan nilai a dan b, kemudian hitunglah $h(-17)$!
8. Ditentukan $f(x) = (x+3)(x-8)$ dengan daerah asal $\{x \mid -4 \le x \le 9, x \in R\}$.
   a. Buatlah tabel $f(x)$!
   b. Gambarlah grafik fungsi $f(x)$ pada himpunan bilangan bulat!
   c. Gambarlah grafik fungsi $f(x)$ pada himpunan bilangan nyata!
   d. Tentukanlah range fungsi tersebut!
9. Selidikilah fungsi-fungsi berikut, apakah tergolong definit positif, definit negatif, atau bukan keduanya!
   a. $y = x^2 + 8x - 2$
   b. $y = -x^2 + 3x - 5$
   c. $y = 2x^2 + 7x - 5$
   d. $y = -3x^2 - x + 7$
10. Diketahui fungsi $f(x) = 2x^2 + 5x - 7$ pada himpunan bilangan nyata. Tanpa menggambar grafiknya, tentukan:
    a. persamaan sumbu simetri parabola;
    b. pembuat nol fungsi;
    c. koordinat titik balik;
    d. nilai minimum fungsi!
11. Suatu fungsi kuadrat mempunyai pembuat nol $x = -3$ dan $x = 5$ dan melalui $(0, -15)$. Tentukan fungsi kuadrat yang dimaksud!
12. Hitunglah nilai maksimum xy, jika $3x + y = 9$!

III. Pemecahan Masalah

Selesaikanlah soal-soal di bawah ini!

1. Jumlah dua bilangan cacah adalah 25 dan hasil kalinya 126. Tentukan kedua bilangan cacah tersebut!
2. Diketahui keliling persegi panjang adalah 50 cm dan luasnya 150 cm^2. Tentukan panjang dan lebar persegi panjang tersebut!
3. Diketahui fungsi $y = x(8x - 1)$ dengan daerah asal $\{x \mid -2 \le x \le 10, x \in R\}$. Tentukan:
   a. koordinat titik potong dengan sumbu X;
   b. koordinat titik potong dengan sumbu Y;
   c. persamaan sumbu simetri parabola;
   d. koordinat titik balik;
   e. nilai maksimum fungsi;
   f. range fungsi!
4. Sebuah persegi panjang, panjangnya x meter dan lebarnya $(10 - x)$ meter.
   a. Bentuklah fungsi $L(x)$ yang menyatakan luas persegi panjang itu!
   b. Tentukan luas maksimum persegi panjang tersebut, kemudian hitunglah pula panjang dan lebarnya!
5. Dua buah bilangan selisihnya 20. Tentukan bilangan-bilangan tersebut agar hasil kalinya minimum dan tentukan pula hasil kali tersebut!

Soal-soal UAN

Seri I

A. Berilah tanda silang (X) pada salah satu huruf a, b, c, atau d yang merupakan jawaban benar pada lembar jawaban!

1. Dari suatu test, seorang peserta memperoleh nilai 46. Penilaian test berlaku untuk jawaban yang benar diberi nilai 2, untuk jawaban salah diberi nilai -1, dan untuk soal yang tidak dijawab tidak diberi nilai. Jika orang tersebut menjawab salah sebayak 10 nomor dan 4 nomor tidak dijawab, maka jumlah soal pada test tersebut adalah ... soal.

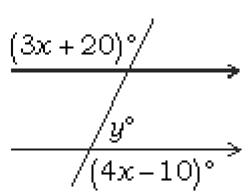
   a. 28 c. 40
   b. 38 d. 42

2. Suatu pekerjaan dapat diselesaikan oleh 40 orang pekerja dalam 30 hari. Setelah dikerjakan selama 10 hari, pekerjaan terhenti selama 4 hari. Jika pekerjaan itu ingin diselesaikan tepat waktu, maka diperlukan tambahan pekerja sebanyak ... orang.

   a. 10 c. 32
   b. 20 d. 50

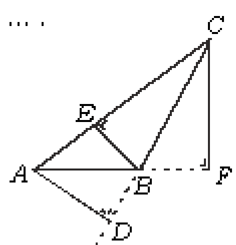
3. Nilai y dari gambar di bawah ini adalah ... .

   a. 30
   b. 60
   c. 70
   d. 110



4. $AB = 12$ cm, $AC = 20$ cm, $BC = 18$ cm, dan $CF = 15$ cm. Panjang AD dan BE berturut-turut adalah ... .

   a. 4,5 cm dan 5 cm
   b. 5 cm dan 4 cm
   c. 9 cm dan 10 cm
   d. 10 cm dan 9 cm



5. $\dfrac{3x-2}{2} + 5 = 2(x+1)$. Nilai $4x-3$ adalah ... .

   a. -1 c. 7
   b. 1 d. 13

6. Walaupun rugi 20%, Ayah tetap menjual motornya seharga Rp 9.600.000,00. Ayah menderita kerugian sebesar ... .

   a. Rp 1.920.000,00
   b. Rp 2.304.000,00
   c. Rp 2.400.000,00
   d. Rp 7.680.000,00

7. Jumlah murid suatu kelas 40 anak. Dari murid tersebut, tercatat 30 anak gemar matematika, 20 anak gemar Bahasa Indonesia, dan 2 anak tidak gemar matematika maupun Bahasa Indonesia. Banyaknya murid yang gemar matematika saja adalah ... .

   a. 8 anak c. 12 anak
   b. 10 anak d. 18 anak

8. Keliling belah ketupat adalah 100 cm. Perbandingan panjang kedua diagonalnya adalah 3 : 4. Luas belah ketupat tersebut adalah ... cm^2.

   a. 600 c. 240
   b. 480 d. 120

9. Penjabaran dari $(2x-3y)$ $(4x^2+6xy+9y^2)$ adalah ... .

   a. $8x^3 - 27y^3$
   b. $8x^3 - 60x^2y^2 - 27y^3$
   c. $8x^3 - 24x^2y - 36xy^2 - 27y^3$
   d. $8x^3 + 12x^2y - 18xy^2 - 27y^3$

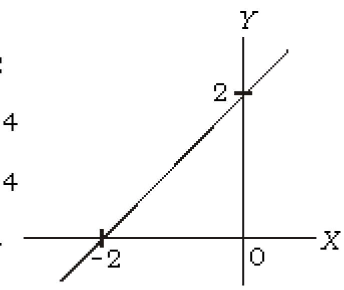
10. Pemfaktoran dari $a^2 - 4(b-c)^2$ adalah ...

    a. $(a+2b+2c)(a-2b-2c)$
    b. $(a+2b-2c)(a-2b-2c)$
    c. $(a-2b-2c)(a-2b-2c)$
    d. $(a+2b-2c)(a-2b+2c)$

11. Diketahui $P = \{2, 3, 4\}$ dan $Q = \{2, 3, 4, 6\}$. Hubungan antara P dan Q yang dinyatakan dengan $\{(2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4)\}$ adalah ... .
    a. kelipatan dari
    b. kurang dari
    c. faktor dari
    d. kurang dari atau sama dengan

12. Suatu fungsi f didefinisikan dengan $f(x) = px + q$. Jika 3 bayangan dari 2 dan -7 bayangan dari -3, maka bayangan 5 adalah ... .
    a. 13 c. 8
    b. 9 d. 7

13. Persamaan garis pada gambar di bawah ini adalah ... .
    a. $-2x + 2y = 2$
    b. $-2x - 2y = -4$
    c. $-2x + 2y = -4$
    d. $2x - 2y = -4$

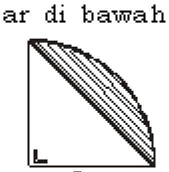


14. Persamaan garis lurus yang melalui titik $(2,0)$ dan tegak lurus garis $x + 3y - 6 = 0$ adalah ... .
    a. $y = 3x - 2$ c. $y = 3x + 2$
    b. $y = 3x - 6$ d. $y = 3x + 6$

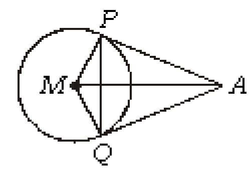
15. Harga 2 permen dan 5 biskuit adalah Rp 800,00. Harga 4 permen dan 3 biskuit adalah Rp 900,00. Harga 5 permen adalah ... .
    a. Rp 500,00 c. Rp 3.500,00
    b. Rp 750,00 d. Rp 4.500,00

16. Segitiga PQR siku-siku di titik P. Panjang $QR = 2 \times$ panjang PQ. Jika panjang $PR = 10\sqrt{3}$ cm maka panjang PQ adalah ... cm.
    a. $2\sqrt{15}$ c. $5\sqrt{3}$
    b. $4\sqrt{15}$ d. 10

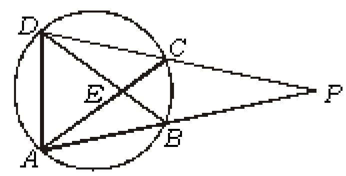
17. Luas tembereng gambar di bawah ini adalah ... .
    a. $a^2(\pi - 2)$
    b. $a^2(\pi - 4)$
    c. $\frac{1}{2}a^2(\pi - 2)$
    d. $\frac{1}{2}a^2(\pi - 4)$


$2a$

18. AP dan AQ adalah garis singgung lingkaran $(M, 12 \text{ cm})$. Jika panjang $AM = 20$ cm maka panjang PQ adalah ... cm.
    a. 8
    b. 9,6
    c. 16
    d. 19,2



19. $\angle ACD = 65°$ dan $\angle AED = 80°$ Besar $\angle APD = ...$.
    a. 15°
    b. 30°
    c. 50°
    d. 60°



20. Jarak $A - B = 200$ km. Sebuah truk berangkat pukul 08.00 dari A menuju B dengan kecepatan 40 km/jam. Pukul 09.00, sebuah bus berangkat dari B menuju A dengan kecepatan 60 km/jam. Truk dan Bus berpapasan di jalan pukul ... .
    a. 09.06 c. 10.06
    b. 09.36 d. 10.36

21. Diketahui luas sisi-sisi balok adalah 12 cm^2, 15 cm^2, dan 20 cm^2. Volume balok adalah ... cm^3.
    a. 47 c. 94
    b. 60 d. 3.600

22. Sebuah prisma beralaskan segitiga sama sisi dengan panjang sisi 8 cm. Luas selimut prisma 120 cm^2. Volume prisma adalah ... cm^3.
    a. $80\sqrt{3}$ c. 160
    b. $480\sqrt{3}$ d. 480

23. Luas permukaan $\frac{3}{4}$ bola padat yang berjari-jari 10 cm adalah ... cm^2.
    a. 100π c. 300π
    b. 200π d. 400π

24. Banyak rusuk dan sisi berturut-turut pada limas segi-n adalah ... .

a. n dan $2n$ c. $2n$ dan $(n+1)^2$

b. $2n$ dan $n+1$ d. $2n$ dan $(2n)^2$

25. Percobaan melempar 3 keping uang logam. Peluang muncul 2 angka dan 1 gambar dengan urutan sembarang adalah ... .

a. $\frac{1}{8}$ c. $\frac{3}{8}$

b. $\frac{1}{4}$ d. $\frac{1}{2}$

26. Peluang seorang suami hidup sampai 60 tahun adalah 0,7. Sedangkan peluang isteri adalah 0,8. Peluang keduanya hidup sampai 60 tahun adalah ... .

a. 0,56 c. 1

b. 0,75 d. 1,5

27. Nilai rata-rata matematika 40 anak adalah 6,8. Jika nilai matematika 5 anak lain ditambahkan pada nilai-nilai tersebut maka rata-ratanya menjadi 7,0. Nilai rata-rata kelima anak tersebut adalah ... .

a. 7,2 c. 8,6

b. 8,0 d. 9

28. Diketahui tabel nilai hasil ulangan matematika sebagai berikut.

Nilai	4	5	6	7	8	9
Frekuensi	3	7	10	12	6	2

Median dari data di atas adalah ... .

a. 6 c. 6,5

b. 6,4 d. 7

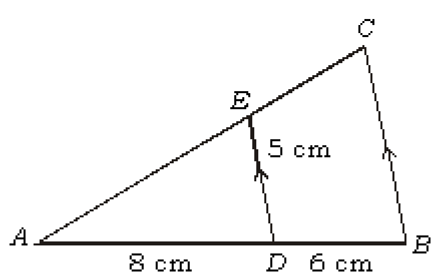
29. Panjang BC adalah ... cm.

a. $6\frac{2}{3}$

b. $8\frac{3}{4}$

c. $9\frac{3}{5}$

d. $9\frac{4}{5}$



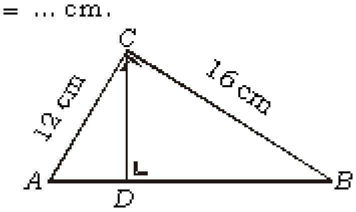
30. Panjang AD = ... cm.

a. 7,2

b. 9,6

c. 12,8

d. 20



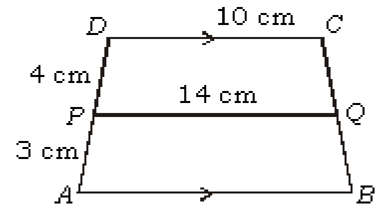
31. Panjang AB = ... cm.

a. 11,7

b. 12,3

c. 16

d. 17



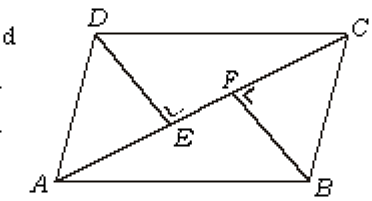
32. $ABCD$ adalah jajargenjang. ΔAED dan ΔBFC kongruen karena memiliki syarat ... .

a. Sd, Sd, Sd

b. S, Sd, Sd

c. Sd, S, Sd

d. Sd, S, S



33. Suku ke-9 dari barisan 1, 3, 6, 10, ... adalah ... .

a. 36 c. 55

b. 45 d. 66

34. Suku ke-n dari barisan 2, 6, 12, 20, ... adalah ... .

a. $n^2 + n + 1$ c. $n^2 + n$

b. $n^2 - n + 1$ d. $n^2 - n$

35. Jumlah 30 bilangan asli yang pertama adalah ... .

a. 450 c. 475

b. 465 d. 930

36. ${}^4\log \frac{1}{\sqrt[5]{8}}$ = ...

a. $\frac{-3}{10}$ c. $\frac{3}{10}$

b. $\frac{-3}{5}$ d. $\frac{3}{5}$

37. $\frac{\log 35 - \log 0{,}35}{\log 2{,}3 - \log 230}$ = ...

a. -2 c. 1

b. -1 d. 2

38. Salah satu akar dari $x^2 + x + c = 0$ adalah 5. Akar yang lain adalah ... .

a. 30 c. -5

b. 6 d. -6

39. Salah satu titik potong dari grafik fungsi $f(x) = x^2 - 6$ dan garis $y = x$ adalah ... .

a. (1,1) c. (3,3)

b. (2,2) d. (4,4)

40. Koordinat titik balik grafik

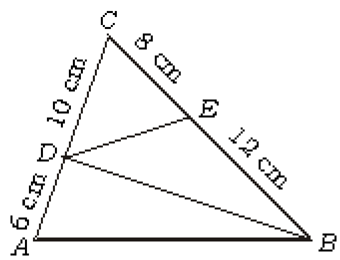
$f(x) = 3(x-2)^2 - 4$ adalah ... .

a. $(2,4)$ c. $(2,-4)$

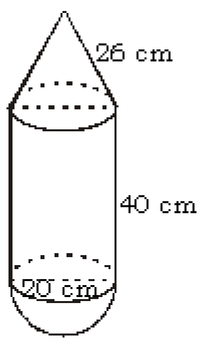
b. $(-2,4)$ d. $(-2,-4)$

B. Jawablah pertanyaan berikut ini!

1. Hitunglah panjang BD dan DE!

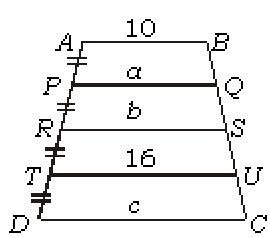


2. Hitunglah luas dan volume bangun di bawah ini!

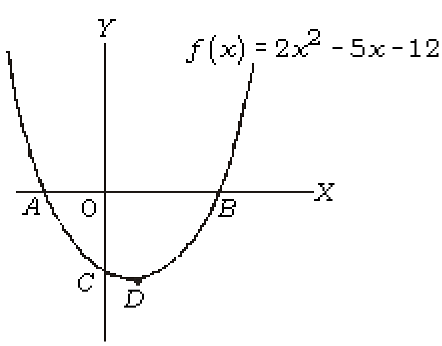


3. Tentukan jumlah bilangan kelipatan 2 antara 500 dan 1.000 yang bukan merupakan kelipatan 3!

4. Tentukan nilai a, b, dan c bila $a = PQ$, $b = RS$, $c = DC$, $AB = 10$ cm, dan TU = 16 cm.



5. Tentukan koordinat-koordinat titik A, B, C, dan D!



Seri II

A. Berilah tanda silang (X) pada salah satu huruf a, b, c, atau d yang merupakan jawaban benar pada lembar jawaban!

1. Jika $x = 4$; $y = -5$ maka nilai dari $2x^2 - 4xy + 2y^2$ adalah ... .

a. 18 c. 150

b. 81 d. 162

2. Harga 5 buku tulis Rp 3.500,00. Toni mempunyai selembar uang Rp 20.000,00 untuk membeli buku tersebut sebanyak-banyaknya. Toni akan menerima uang pengembalian sebesar ... .

a. Rp 200,00 c. Rp 400,00

b. Rp 300,00 d. Rp 500,00

3. Pertidaksamaan yang paling sederhana dari $-3x + 7 > 19$ adalah ... .

a. $x < 4$ c. $x < -4$

b. $x > 4$ d. $x > -4$

4. Umur Ani : umur Budi = 2 : 5 . Umur Budi : umur Cahyo = 2 : 3 . Jika umur Ani 8 tahun maka umur Cahyo adalah ... .

a. 12 tahun c. 20 tahun

b. 15 tahun d. 30 tahun

5. $P = \{1, 2, 3, 4\}$. Banyaknya himpunan bagian dari P yang banyak anggotanya 2 adalah ... .

a. 4 c. 10

b. 6 d. 16

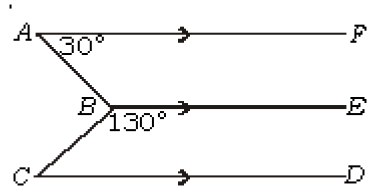
6. Pada gambar di bawah ini, jika $\angle BAF = 30°$, $\angle CBE = 130°$, maka $\angle ABC$ = ...

a. 80°

b. 75°

c. 70°

d. 65°



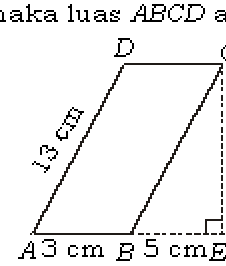
7. Bangun $ABCD$ adalah bangun jajargenjang. Jika $AB = 3$ cm, $AD = 13$ cm, dan $BE = 5$ cm, maka luas $ABCD$ adalah ... cm^2.

a. 36

b. 39

c. 60

d. 65



8. Jika sebuah kubus dipotong pada dua pojoknya maka banyak sisi kubus tersebut adalah ... .

   a. 4 c. 8

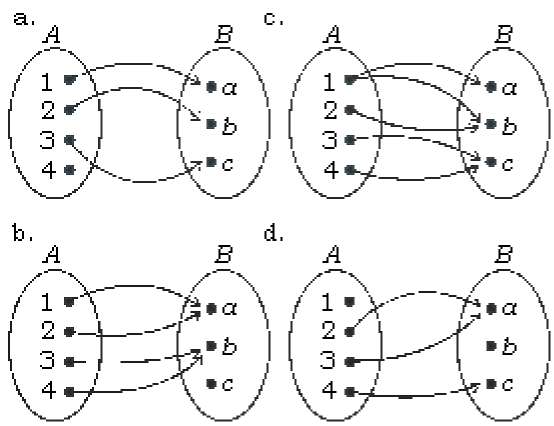
   b. 6 d. 10

9. Pemfaktoran dari $x^2 - 10x - 24$ adalah ...

   a. $(x-4)(x-6)$ c. $(x+2)(x-12)$

   b. $(x-2)(x-12)$ d. $(x+4)(x-6)$

10. Relasi berikut yang merupakan fungsi adalah ... .



11. Persamaan garis lurus yang melalui titik $(0,0)$ dari titik $(2,1)$ adalah ... .

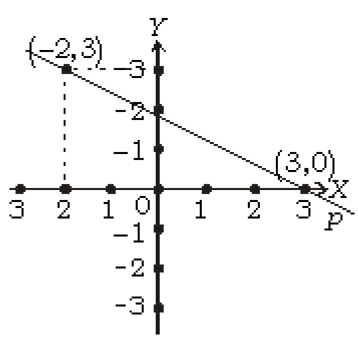
   a. $y = -\frac{1}{2}x$ c. $y = -2x$

   b. $y = \frac{1}{2}x$ d. $y = 2x$

12. Persamaan garis p pada gambar di bawah ini adalah ... .

   a. $3x + 5y = 9$ c. $2x + 3y = 6$

   b. $3x - 5y = 9$ d. $2x - 3y = 6$



13. Himpunan penyelesaian sistem persamaan $3x + y = 3$ dan $2x - 3y = 13$ adalah ... .

   a. $\{(-2,-3)\}$ c. $\{(-2,3)\}$

   b. $\{(2,-3)\}$ d. $\{(2,3)\}$

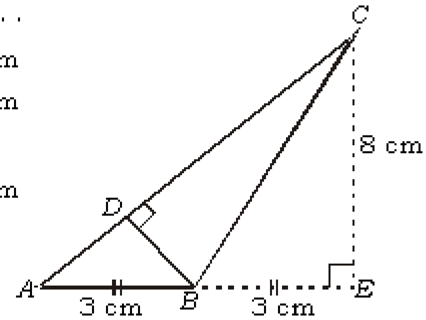
14. Pada gambar di bawah ini, $AB = BE = 3$ cm, $EC = 8$ cm. Panjang garis tinggi $BD =$ ... .

   a. 1,2 cm

   b. 2,4 cm

   c. 4 cm

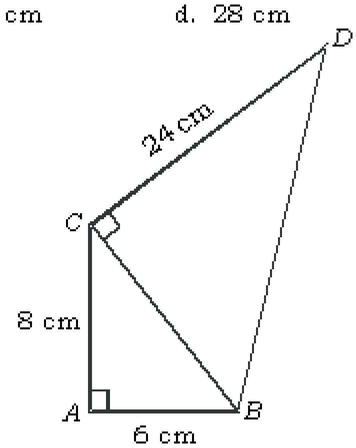
   d. 4,8 cm



15. Pada gambar di bawah ini, $\angle BAC$ siku-siku, $\angle BCD$ siku-siku. Jika $AB = 6$ cm, $CD = 24$ cm, dan $AC = 8$ cm maka panjang BD adalah ... .

   a. 25 cm c. 27 cm

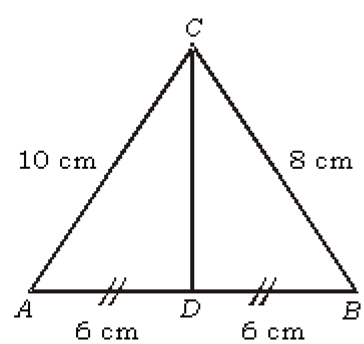
   b. 26 cm d. 28 cm



16. Pada gambar di bawah ini, CD adalah garis berat dalam segitiga ABC. Jika $AB = 12$ cm, $AC = 10$ cm, dan $BC = 8$ cm maka panjang CD adalah ... .

   a. $\sqrt{45}$ cm c. $\sqrt{47}$ cm

   b. $\sqrt{46}$ cm d. $\sqrt{48}$ cm

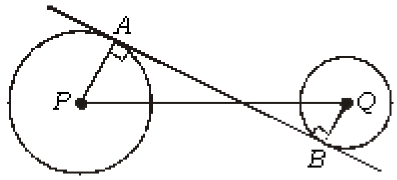


17. Jari-jari roda sepeda adalah 28 cm. Amir mengendarai sepeda tersebut sejauh 4,4 km. Roda tersebut harus berputar sebanyak ... .

   a. 2.500 kali c. 2.800 kali

   b. 2.750 kali d. 3.000 kali

18. Perhatikan gambar di bawah ini! AB adalah garis singgung persekutuan dalam. Jika PQ = 10 cm , AP = 4 cm, dan BQ = 2 cm maka panjang AB = ...



a. 6 cm
b. 8 cm
c. 14 cm
d. 16 cm

19. Diketahui jari-jari alas tabung 14 cm dan tingginya 15 cm. Jika $\pi = \frac{22}{7}$ maka volume tabung adalah ... cm^3.

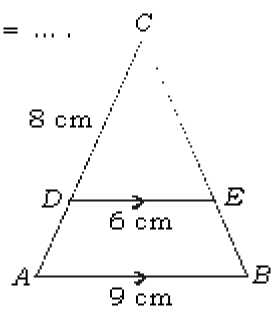
a. 440 c. 6.160
b. 880 d. 9.240

20. Jari-jari alas suatu kerucut adalah 10 cm dan tingginya 24 cm. Jika π = 3,14 maka luas sisinya adalah ... cm^2.

a. 816,4 c. 1.130,4
b. 924,6 d. 1.224,6

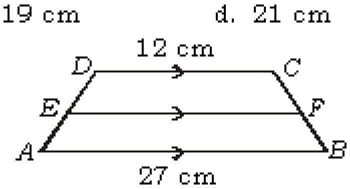
21. Pada gambar di bawah ini, $DE \parallel AB$. Jika AB = 9 cm , DE = 6 cm , dan CD = 8 cm maka panjang AD = ...

a. 2 cm
b. 3 cm
c. 4 cm
d. 5 cm

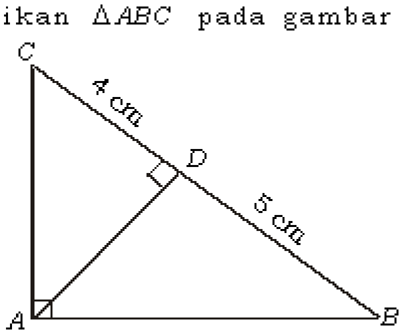


22. Pada gambar, $DC \parallel EF \parallel AB$. Jika DC = 12 cm, AB = 27 cm , dan $DE : EA$ = 3 : 2 maka panjang EF adalah ... .

a. 18 cm c. 20 cm
b. 19 cm d. 21 cm



23. Perhatikan ΔABC pada gambar di bawah!



$\angle BAC = 90°$, AD adalah garis tinggi. Jika CD = 4 cm, DB = 5 cm maka panjang AC = ...

a. 5,5 cm c. 6,5 cm
b. 6 cm d. 7 cm

24. Tinggi suatu prisma adalah 15 cm dan alasnya berbentuk belah ketupat dengan panjang diagonalnya 8 cm dan 10 cm. Volume prisma tersebut adalah ... .

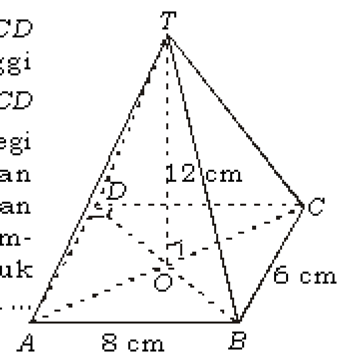
a. 150 cm^3 c. 600 cm^3
b. 300 cm^3 d. 1.200 cm^3

25. Alas suatu limas berbentuk persegi dengan panjang diagonalnya 10 cm. Jika volume limas tersebut 300 cm^3 maka tinggi limas tersebut adalah ... .

a. 12 cm c. 24 cm
b. 18 cm d. 36 cm

26. Perhatikan gambar di bawah!

Limas $T.ABCD$ dengan tinggi TO = 12 cm , $ABCD$ berbentuk persegi panjang dengan panjang 8 cm dan lebar 6 cm. Jumlah panjang rusuk limas itu adalah ...



a. 80 cm c. 85 cm
b. 82 cm d. 90 cm

27. Nilai Matematika sejumlah siswa tercatat sebagai berikut.

5 4 6 5 7 8 4 3 6 7 8 9

Median dari data di atas adalah ... .

a. 5,5 c. 6,5
b. 6 d. 7

28.

N	2	3	4	5	6	7	8	9
F	5	7	13	15	30	20	6	4

Mean dari data di atas adalah ... .

a. 5,60 c. 5,62
b. 5,61 d. 5,63

29. Sebuah dadu bersisi enam, dilempar undi sebanyak 120 kali. Berapakah frekuensi harapan muncul mata dadu 3 atau 5?

a. 30 c. 45
b. 40 d. 60

30. Suatu bilangan terdiri dari 2 angka yang diambil dari angka-angka 3, 4, 5, dan 6.

Berapa banyak bilangan dapat dibuat jika angka tidak boleh berulang (sama)?

a. 6
b. 8
c. 12
d. 16

31. $16^{-\frac{1}{2}}$ dapat dinyatakan sebagai ... .

a. 0,20
b. 0,25
c. 0,40
d. 0,80

32. Jika $\log 2 = a$, $\log 3 = b$, dan $\log 5 = c$ maka $\log 1\frac{1}{5} = \ldots$.

a. $\frac{ab}{c}$
b. $\frac{a+b}{c}$
c. $\frac{a+b}{-c}$
d. $a+b-c$

33. $\log 0,05 + \log 4 - \log 2,5 - \log 8 = \ldots$.

a. -1
b. -2
c. -3
d. -4

34. ${}^{2}\log \sqrt[3]{4} + {}^{2}\log \sqrt[5]{2} = \ldots$.

a. $\frac{13}{15}$
b. $\frac{14}{15}$
c. $\frac{15}{15}$
d. $\frac{16}{15}$

35. Dua suku berikut dari barisan 2, 3, 5, 7, ... adalah ... .

a. 9 dan 10
b. 9 dan 11
c. 11 dan 13
d. 12 dan 19

36. Diketahui barisan 2, 5, 8, 11, 14, ... Suku ke-n (U_n) dari barisan tersebut adalah ... .

a. $U_n = n - 3$
b. $U_n = n + 3$
c. $U_n = 3n - 1$
d. $U_n = 3n + 1$

37. Diketahui barisan 5, 10, 20, 40, 80, ... $U_{50} = \ldots$.

a. 5×2^{49}
b. 5×2^{51}
c. 10^{49}
d. 10^{51}

38. Salah satu penyelesaian $2x^2 - x - 6 = 0$ adalah ... .

a. $x = -2$
b. $x = -1\frac{1}{2}$
c. $x = 1\frac{1}{2}$
d. $x = 2$

39. Jika 3 merupakan salah satu akar persamaan $3x^2 + bx - 6 = 0$ maka nilai b adalah ... .

a. 7
b. 5
c. -5
d. -7

40. Persamaan kuadrat yang akar-akarnya 2 atau -5 adalah ... .

a. $x^2 + x + 5 = 0$
b. $x^2 + 3x + 10 = 0$
c. $x^2 + 3x - 10 = 0$
d. $x^2 - 3x + 10 = 0$

B. Jawablah pertanyaan berikut ini!

1. Data kegiatan ekstrakurikuler yang diikuti 75 siswa di suatu sekolah tercatat sebagai berikut.
   35 siswa mengikuti basket
   35 siswa mengikuti voli
   40 siswa mengikuti catur
   15 siswa mengikuti basket dan voli
   14 siswa mengikuti voli dan catur
   18 siswa mengikuti basket dan catur
   10 siswa mengikuti basket, voli, dan catur.
   a. Gambarlah diagram Venn dari data di atas!
   b. Berapa banyak siswa yang mengikuti catur saja?
2. Harga 4 kg duku dan 3 kg jeruk Rp 33.000,00. Harga 3 kg duku dan 5 kg jeruk Rp 38.500,00.
   a. Susunlah 2 persamaan dengan dua variabel!
   b. Berapa rupiah harga masing-masing 1 kg duku dan 1 kg jeruk?
3. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui titik $A(-2,3)$ dan tegak lurus terhadap garis $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 6$!
4. Dalam suatu aula, tersusun kursi dengan susunan sebagai berikut.
   Baris I sebanyak 20 kursi
   Baris II sebanyak 22 kursi
   Baris III sebanyak 24 kursi
   Baris IV sebanyak 26 kursi
   Baris V sebanyak 28 kursi
   Dan seterusnya.
   Jika dalam aula tersebut terdapat 25 baris, berapa banyak kursi dalam aula?
5. Tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya 2 lebihnya dari akar-akar persamaan $x^2 + 2x - 15 = 0$!

Daftar Pustaka

Agil, C. 1973. *Pelajaran Ilmu Ukur untuk SMP*. Jilid 1, 2, 3. Yogyakarta: Kanisius.

Birkhoff, S. and Saunders M.L. 1954. *A Survey of Modern Algebra*. Cetakan kedua. New York: Mac Millan.

Crosswhite, F. Joe. 2004. *"Statistika"* dalam *Ilmu Pengetahuan Populer Jilid 2*. Jakarta: Grolier PT Widyadara.

___________. 2004. *"Probabilitas"* dalam *Ilmu Pengetahuan Populer Jilid 2*. Jakarta: Grolier PT Widyadara.

___________. 2004. *"Planimetri"* dalam *Ilmu Pengetahuan Populer Jilid 2*. Jakarta: Grolier PT Widyadara.

Departemen Pendidikan dan Kebudayaan. 1986. *Matematika SMP*. Jakarta: Intermasa.

Edwin, I. dan Stein. 1971. *Modern Algebra*. Step by Step 2nd Book.

Fehr, Howard F. 1984. *"Aljabar"* dalam *Ilmu Pengetahuan Populer Jilid 2*. Jakarta: Grolier PT Widyadara.

Hadi, Sutrisno. 1980. *Statistik*. Jilid I. Cetakan ke-4. Yogyakarta: Fakultas Psikologi UGM.

Hamid, M. 1986. *Statistika*. Jakarta: Karunika.

Hardy, G.H. dan E.M. Wright. 1981. *An Introduction to the Theory of Number*. Edisi kelima. Oxford: The English Language Book Society.

Hollands, T. 1989. *Kamus Matematika*. Jakarta: Erlangga.

Koesmartono. 1979. *Matematika Pendahuluan*. Bandung: ITB.

Lipschultz, S. 1964. *Finite Mathematics*. New York: Mc Graw-Hill.

___________. 1981. *Set Theory and Related Topics*. Singapore: Mc Graw-Hill International.

Negoro, ST dan Harahap, B. 1999. *Ensiklopedi Matematika*. Jakarta: Ghalia Indonesia

Nielsen, K.L. 1970. *Modern Algebra*. New York: Barnes Noble.

Ruseffendi, E.T. 1984. *Matematika Modern untuk Guru*. Bandung: Tarsito.

Saltzheer, J.P., L.P. Ritchi, dan Lumban Tobing. 1962. *Aljabar dan Teori Berhitung*. Jilid I, II, dan III. Jakarta: Pradnya Paramita.

Sowardi. 1984. *Melukis Bentuk Geometri*. Jakarta: Gramedia.

Tim Matematika SLTP. 2001. *Matematika 3 untuk SLTP Kelas 3*. Jakarta: PT Galaxy Puspa Mega

Van Thijn, A., M.L. Kobus, dan R.D. Rawuh. 1966. *Ilmu Ukur Segitiga*. Jakarta: Pradnya Paramita.

Walpole, Ronald E. 1992. *Pengantar Statistika.* Edisi ke-3. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama

Indeks

T

U

V

Glosarium

Aritmetika : cabang dari matematika. Aritmetika disebut juga ilmu hitung.

Barisan bilangan : mengurutkan bilangan-bilangan menurut suatu aturan tertentu.

Basis : bilangan pokok.

Bilangan bulat : bilangan yang terdiri atas bilangan asli (bilangan bulat positif), bilangan nol, dan lawan bilangan asli (bilangan bulat negatif).

Bilangan rasional : bilangan yang berbentuk $\frac{a}{b}$ dengan a, b bilangan bulat dan .

Bilangan real : suatu bilangan yang terdiri dari bilangan rasional dan irasional.

Derajat : satuan ukuran sudut, tekanan udara, dan suhu.

Diagonal : garis yang ditarik dari titik sudut ke titik sudut yang tidak bersisian pada sebuah bangun datar.

Diagram : gambar yang menyatakan data tertentu atau kesimpulan yang diperoleh dari data tertentu.

Eksponen : pangkat.

$b \neq 0$

Eliminasi : penyisihan/pengeluaran.

Ekuivalen : sama.

Frekuensi : jumlah kejadian.

Frekuensi kumulatif : frekuensi yang dijumlahkan.

Frekuensi relatif : terkaan/dugaan tentang seringnya suatu data muncul.

Himpunan penyelesaian : himpunan semua penyelesaian suatu persamaan, sistem persamaan, dan pertidaksamaan.

Histogram : grafik frekuensi bertangga, membentuk serangkaian persegi panjang yang panjangnya sebanding dengan frekuensi yang terdapat dalam kelas-kelas interval yang bersangkutan.

Implikasi : pernyataan bersyarat.

Invers : kebalikan.

Jangkauan : ukuran tertinggi dikurangi ukuran terendah.

Kongruen : mempunyai bentuk sama dan ukuran sama.

Koordinat : bilangan yang digunakan untuk menunjuk lokasi titik dalam garis, permukaan, atau ruang.

Kuartil : ukuran perempatan atau pengelompokan empat-empat, membagai ukutan yang telah berurutan menjadi empat bagian yang sama.

Logaritma : eksponen pangkat yang diperlukan untuk memangkatkan bilangan dasar supaya mendapatkan bilangan tertentu (jika bilangan dasarnya 10, maka log 100 = 2, artinya 10 pangkat 2 = 100).

Mantisa : bagian desimal dari suatu logaritma.

Mean : rata-rata.

Median	:	nilai tengah.
Modus	:	nilai yang sering muncul.
Noktah	:	tidak sama dengan titik. Titik tidak terbentuk, tidak mempunyai ukuran, tidak mempunyai berat, tidak didefinisikan dan tidak merupakan suatu ide saja. Karena itu tidak hanya menggambar titik atau membuat model titik. Gambar atau model itu disebut noktah.
Pecahan	:	bilangan yang menggambarkan bagian dari suatu keseluruhan, bagian dari suatu daerah, benda, atau himpunan.
Persamaan	:	kalimat terbuka yang menyatakan hubungan "sama dengan".
Persamaan kuadrat	:	persamaan yang berbentuk ; .
Pertidaksamaan	:	kalimat terbuka yang menggunakan tanda ketidaksamaan.
Ruang sampel	:	himpunan semua hasil yang mungkin terjadi.
Sebangun	:	bentuk sama tetapi ukuran-ukurannya mempunyai perbandingan yang sama.
Selimut tabung	:	sisi lengkung tabung.
Selimut kerucut	:	sisi lengkung kerucut.
Skala	:	perbandingan ukuran besarnya gambar dan sebagainya dengan keadaan yang sebenarnya.
Substitusi	:	penggantian.
Sudut	:	gabungan sinar yang bersekutu titik pangkalnya.
Tembereng	:	daerah yang dibatasi oleh sebuah tali busur dan busur pada sebuah lingkaran.
Variabel	:	peubah.

Kunci Jawaban

Bab 1 Kesebangunan

I.

1. 20 cm dan 24 cm
7. 2,4 cm dan 10,5 cm

II.

1. a. -
   b. 6 dan 8
3. a. 10
   b. OE = 3,6 cm
   c. OD = 6,4 cm
   d. OC = 4,8 cm
   e. OF = 5,2 cm
5. (i) $3\frac{3}{5}$ (ii) 8

III.

3. 6 cm
7. Segitiga-segitiga yang sebangun adalah:
   ΔABC, ΔQDL, ΔDBE, ΔEDL, ΔLEP, ΔRPC, ΔQBP
   Segitiga yang saling kongruen adalah:
   ΔQDL, ΔDBE, ΔEDL, ΔLEP

Bab 2 Bangun Ruang Sisi Lengkung

I.

1. a. 3.080 cm³ b. 1.672 cm²
3. a. 2.464 cm² b. 6.468 cm³
5. a. 10 m b. 26 cm c. 1130,4 cm²
7. a. 10 cm b. 314 cm²
   c. 392,5 cm² d. 471 cm²

II.

1. 131.880 gram
3. a. 403,326 cm³
   b. 403,326 cm³
5. 1.766,25 cm³
7. 2.464 cm³

III.

1. 442,5 liter
3. Rp 96.162.500,00
5. 539.000 cm³
7. Rp 11.304.000,00
9. Luas selimut tabung 36π, Luas selimut kerucut 15π, dan Luas bola 124π.
11. 1.232 cm³

Bab 3 Statistika

I.

1. -
3. Mean = 6,375; Median = 7 ; Modus = 7
5. -

II.

1. a. 70,06 b. 68 - 74
3. $K_1 = 2{,}5$ dan $K_3 = 8{,}75$
5. 7,6

III.

1. a. 5 b. 60 - 64
   c. 65 d. 74
   e. 77 f. 89
   g. 50
3. -

Bab 4 Peluang

I.

1. a. $\frac{1}{4}$ b. $\frac{1}{3}$ c. $\frac{5}{12}$
   d. $\frac{3}{4}$ e. 200
3. a. $\frac{1}{6}$ b. $\frac{1}{3}$ c. $\frac{1}{12}$

II.

1. a. $\frac{1}{6}$ b. $\frac{1}{8}$ c. $\frac{1}{4}$
   d. $\frac{1}{6}$ e. $\frac{7}{24}$ f. $\frac{1}{24}$
   g. $\frac{3}{8}$
3. -

III.

1. a. $\frac{1}{12}$ b. $\frac{1}{11}$ c. 1
3. a. 200 b. 300 c. 350

Bab 5 Bilangan Berpangkat dan Bentuk Akar

I.

1. a. 1 b. 0 c. –32
   d. 16 e. –16 f. –125
   g. m genap h. tidak
3. a. $\sqrt[5]{x^2}$ b. $\sqrt[5]{2x^3}$
   c. $\sqrt[3]{3x}$ d. $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$
   e. $\sqrt[3]{\frac{1}{81}} \cdot \sqrt{x}$ f. $\sqrt[5]{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt[5]{256}$
   g. $27\sqrt{3}$
5. a. $2^{\frac{5}{3}}$ b. $2^{-\frac{1}{2}}$ c. $2^{-\frac{3}{5}}$
   d. $2^{-\frac{1}{2}}$ e. 2^{-2} f. $2^{-\frac{1}{2}}$
7. a. $43\sqrt{3}$ b. $29\sqrt{2}$
   c. $4\sqrt{2}$ d. $-29\sqrt{3}$
9. a. 256 b. –6 c. 5
   d. 625 e. 8 f. 10

II.

1. a. $3x$ b. $3y$ c. $4x$
   d. $5z$ e. $27y$ f. $5x$
   g. $7y$ h. $9y - 5x$
   i. $5xz + xyz$ j. $2yz + 3y$
3. a. $\frac{3}{5}\sqrt{5}$ b. $\frac{\sqrt{35} - \sqrt{14}}{3}$
   c. $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ d. $\frac{6\sqrt{3} + 3\sqrt{6}}{2}$
   e. $5\sqrt{3} + 5\sqrt{2}$ f. $\frac{5\sqrt{2} - 5}{2}$
5. a. $a^{12}b^{6}$ c. $a^{-3}b^{5}c^{-2}d^{-2}$
   b. $a^{15}b^{6}c^{-12}$ d. $a^{20}b^{-12}$
7. a. 6 b. 0

III.

1. a. $x = \frac{5\sqrt{2} - 4y\left(1+\sqrt{2}\right)}{2\left(2+\sqrt{2}\right)}$ b. $y = \frac{5\sqrt{2} - 2x\left(2+\sqrt{2}\right)}{4\left(1+\sqrt{2}\right)}$
3. a. 1271,7 cm^3 b. 6430,72 cm^3
5. 19,901 cm

Bab 6 Barisan dan Deret

I.

1. a. 17, 20, 23 b. 276, 270, 264
   c. 31, 33, 47 d. 17, 19, 23
   e. 196, 225, 256 f. 81, 243, 729
3. a. 98, 96, 94, 92, 90, ...
   b. 6, 14, 24, 36, 50, ...
   c. 1, 3, 5, 7, 9, ...
   d. 1, 3, 7, 13, 21, ...

II.

1. a. 2 b. 3 c. 299
   d. $U_n = 3_n - 1$ e. 3.775
3. a. 96 b. $\frac{1}{2}$ c. 6
   d. $\frac{3}{4}$ e. 191,25
5. 2.550
7. a. $U_n = n^3$ b. $U_n = n^2 + n$
9. 935

III.

1. a. 10, 12, 14, 16, 18, ...
   b. $Sn = n(9 + n)$
   c. 2.950 kursi
3. a. 60 kursi b. 943 kursi
5. a. 4.888 b. –264

Bab 7 Persamaan dan Fungsi Kuadrat (Pengayaan)

I.

1. a. $x = \frac{7}{2}$ dan $x = -\frac{7}{2}$

   b. $x = -\frac{3}{2}$ dan $x = \frac{1}{5}$

   c. $x = \frac{1}{7}$ dan $x = -2$

   d. $x = -\frac{2}{5}$ dan $x = \frac{3}{2}$

   e. $x = -\frac{7}{2}$ dan $x = \frac{2}{3}$

3. a. -7 b. $-\frac{13}{4}$

5. a. $\{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

   b. $\{-13, 0, 11, 20, 27, 32, 35, 36\}$

II.

1. $b = -11$ Akar yang lain $-\frac{1}{6}$

3. a. $\{-7, -4\}$ b. $\left\{-\frac{7}{2}, \frac{1}{4}\right\}$

   c. $\left\{-6, \frac{1}{3}\right\}$

III.

1. $x = 7$ dan $y = 18$

Soal-soal UAN

SERI 1

A.

1. d	11. c	21. b	31. d
2. a	12. b	22. a	32. b
3. a	13. d	23. d	33. b
4. d	14. b	24. b	34. c
5. c	15. b	25. c	35. b
6. c	16. d	26. a	36. a
7. d	17. a	27. c	37. c
8. b	18. d	28. c	38. d
9. a	19. c	29. b	39. c
10. d	20. d	30. a	40. c

B.

1. -
2. 3.466,67 π
3. 166
4. $a = 12$, $b = 14$, dan $c = 18$
5. $A(-\frac{3}{2}, 0)$, $B(4, 0)$, $C(0, -12)$, dan $D(\frac{5}{4}, 15\frac{1}{8})$

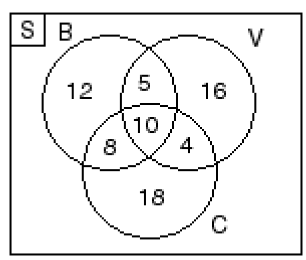
SERI 2

A.

1. d	11. b	21. c	31. b
2. c	12. a	22. d	32. d
3. c	13. b	23. b	33. b
4. d	14. b	24. c	34. a
5. b	15. b	25. b	35. c
6. a	16. b	26. a	36. c
7. a	17. a	27. c	37. a
8. c	18. b	28. c	38. d
9. c	19. d	29. b	39. d
10. b	20. c	30. c	40. b

B.

1. a.



   b. 18 siswa

2. a. $4x + 3y = 33.000$

   $3x + 5y = 38.500$

   b. Harga 1 kg duku Rp 4.500,00

   Harga 1 kg jeruk Rp 5.000,00

3. $y = \frac{1}{3}x + 3\frac{2}{3}$

4. 1.100 kursi

5. $x^2 - 2x - 15 = 0$

Daftar Logaritma

B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	,000	004	009	013	017	021	025	029	033	037
1,1	,041	045	049	053	057	061	064	068	072	076
1,2	,079	083	086	090	093	097	100	104	107	111
1,3	,114	117	121	124	127	130	134	137	140	143
1,4	,146	149	152	155	158	161	164	167	170	173
1,5	,176	179	182	185	188	190	193	196	199	201
1,6	,204	207	210	212	215	217	220	223	225	228
1,7	,230	233	236	238	241	243	246	248	250	253
1,8	,255	258	260	262	265	267	270	272	274	276
1,9	,279	281	283	286	288	290	292	294	297	299
2,0	,301	303	305	307	310	312	314	316	318	320
2,1	,322	324	326	328	330	332	334	336	338	340
2,2	,342	344	346	348	350	352	354	356	368	360
2,3	,362	364	365	367	369	371	373	375	377	378
2,4	,380	382	384	386	387	389	391	393	394	396
2,5	,398	400	401	403	405	407	408	410	412	413
2,6	,415	417	418	420	422	423	425	427	428	430
2,7	,431	433	435	436	438	439	441	442	444	446
2,8	,447	449	450	452	453	455	456	458	459	461
2,9	,462	464	465	467	468	470	471	473	474	476
3,0	,477	479	480	481	483	484	486	487	489	490
3,1	,491	493	494	496	497	498	500	501	502	504
3,2	,505	507	508	509	511	512	513	515	516	517
3,3	,519	520	521	522	524	525	526	528	529	530
3,4	,531	533	534	535	537	538	539	540	542	543
3,5	,544	545	547	548	549	550	551	553	554	555
3,6	,556	558	559	560	561	562	563	565	566	567
3,7	,568	569	571	572	573	574	575	576	577	579
3,8	,580	581	582	583	584	585	587	588	589	590
3,9	,591	592	593	594	595	597	598	599	600	601
4,0	,602	603	604	605	606	607	609	610	611	612
4,1	,613	614	615	616	617	618	619	620	621	622
4,2	,623	624	625	626	627	628	629	630	631	632
4,3	,633	634	635	636	637	638	639	640	641	642
4,4	,643	644	645	646	647	648	649	650	651	652
4,5	,653	654	655	656	657	658	659	660	661	662
4,6	,663	664	665	666	667	667	668	669	670	671
4,7	,672	673	674	675	676	677	678	679	679	680
4,8	,681	682	683	684	685	686	687	688	688	689
4,9	,690	691	692	693	694	695	695	696	697	698
5,0	,699	700	701	702	702	703	704	705	706	707
5,1	,708	708	709	710	711	712	713	713	714	715
5,2	,716	717	718	719	719	720	721	722	723	723
5,3	,724	725	726	727	728	728	729	730	731	732
5,4	,732	733	734	735	736	736	737	738	739	740
5,5	,740	741	742	743	744	744	746	746	747	747
5,6	,748	749	750	751	751	752	753	754	754	755
5,7	,756	757	757	758	759	760	760	761	762	763
5,8	,763	764	765	766	766	767	768	769	769	770
5,9	,771	772	772	773	774	775	775	776	777	777
6,0	,778	779	780	780	781	782	782	783	784	785
6,1	,785	786	787	787	788	789	790	790	791	792
6,2	,792	793	794	794	795	796	797	797	798	799
6,3	,799	800	801	801	802	803	803	804	805	806
6,4	,806	807	808	808	809	810	810	811	812	812
6,5	,813	814	814	815	816	816	817	818	818	819
6,6	,820	820	821	822	822	823	823	824	825	825
6,7	,826	827	827	828	829	829	830	831	831	832
6,8	,833	833	834	834	835	836	836	837	838	838
6,9	,839	839	840	841	841	842	843	843	844	844
7,0	,845	846	846	847	848	848	849	849	850	851
7,1	,851	852	852	853	854	854	855	856	856	857
7,2	,857	858	859	859	860	860	861	862	862	863
7,3	,863	864	865	865	866	866	867	867	868	869
7,4	,869	870	870	871	872	872	873	873	874	874

Daftar Logaritma

B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7,5	,875	876	876	877	877	878	879	879	880	880
7,6	,881	881	882	883	883	884	884	885	885	886
7,7	,886	887	888	888	889	889	890	890	891	892
7,8	,892	893	893	894	894	895	895	896	897	897
7,9	,898	898	899	899	900	900	901	901	902	903
8,0	,903	904	904	905	905	906	906	907	907	908
8,1	,908	909	910	910	911	911	912	912	913	913
8,2	,914	914	915	915	916	916	917	918	918	919
8,3	,919	920	920	921	921	922	922	923	923	924
8,4	,924	925	925	926	926	927	927	928	928	929
8,5	,929	930	930	931	931	932	932	933	933	934
8,6	,934	935	936	936	937	937	938	938	939	939
8,7	,940	940	941	941	941	942	943	943	943	944
8,8	,944	945	945	946	946	947	947	948	948	949
8,9	,949	950	950	951	951	952	952	953	953	954
9,0	,954	955	955	956	956	957	957	958	958	959
9,1	,959	960	960	960	961	961	962	962	963	963
9,2	,964	964	965	965	966	966	967	967	968	968
9,3	,968	969	969	970	970	971	971	972	972	973
9,4	,973	974	974	975	975	975	976	976	977	977
9,5	,978	978	979	979	980	980	980	981	981	982
9,6	,982	983	983	984	984	985	985	985	986	986
9,7	,987	987	988	988	989	989	989	990	990	991
9,8	,991	992	992	993	993	993	994	994	995	995
9,9	,996	996	997	997	997	998	998	999	999	1.000

Daftar Antilogaritma

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
,00	100	100	100	101	101	101	101	102	102	102
,01	102	103	103	103	103	104	104	104	104	104
,02	105	105	105	105	106	106	106	106	107	107
,03	107	107	108	108	108	108	109	109	109	109
,04	110	110	110	110	111	111	111	111	112	112
,05	112	112	113	113	113	114	114	114	114	115
,06	115	115	115	116	116	116	116	117	117	117
,07	117	118	118	118	119	119	119	119	120	120
,08	120	121	121	121	121	122	122	122	122	123
,09	123	123	124	124	124	124	125	125	125	126
,10	126	126	126	127	127	127	128	128	128	129
,11	129	129	129	130	130	130	131	131	131	132
,12	132	132	132	133	133	133	134	134	134	135
,13	135	135	136	136	136	136	137	137	137	138
,14	138	138	139	139	139	140	140	140	141	141
,15	141	142	142	142	143	143	143	144	144	144
,16	145	145	145	146	146	146	147	147	147	148
,17	148	148	149	149	149	150	150	150	151	151
,18	151	152	152	152	153	153	153	154	154	155
,19	155	155	156	156	156	157	157	157	158	158
,20	158	159	159	160	160	160	161	161	161	160
,21	162	163	163	163	164	164	164	165	165	166
,22	166	166	167	167	167	168	168	169	169	169
,23	170	170	171	171	171	172	172	173	173	173
,24	174	174	175	175	175	176	176	177	177	177
,25	178	178	179	179	179	180	180	181	181	182
,26	182	182	183	183	184	184	185	185	185	186
,27	186	187	187	188	188	188	189	189	190	190
,28	191	191	191	192	192	193	193	194	194	195
,29	195	195	196	196	197	197	198	198	199	199
,30	200	200	200	201	201	202	202	203	203	204
,31	204	205	205	206	206	207	207	207	208	208
,32	209	209	210	210	211	211	212	212	213	213
,33	214	214	215	215	216	216	217	217	218	218
,34	219	219	220	220	221	221	222	222	223	223

Daftar Antilogaritma

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
,35	224	224	225	225	226	226	227	228	228	229
,36	229	230	230	231	231	232	232	233	233	234
,37	234	235	236	236	237	237	238	238	239	239
,38	240	240	241	242	242	243	243	244	244	245
,39	245	246	247	247	248	248	249	249	250	251
,40	251	252	252	253	254	254	255	255	256	256
,41	257	258	258	259	259	260	261	261	262	262
,42	263	264	264	265	265	266	267	267	268	269
,43	269	270	270	271	272	272	273	274	274	275
,44	275	276	277	277	278	279	279	280	281	281
,45	282	282	283	284	284	285	286	286	287	288
,46	288	289	290	290	291	292	292	293	294	294
,47	295	296	296	297	298	299	299	300	301	301
,48	302	303	303	304	305	305	306	307	308	308
,49	309	310	310	311	312	313	313	314	315	316
,50	316	317	318	318	319	320	321	321	322	323
,51	324	324	325	326	327	327	328	329	330	330
,52	331	332	333	333	334	335	336	337	337	338
,53	339	340	340	341	342	343	344	344	345	346
,54	347	348	348	349	350	351	352	352	353	354
,55	355	356	356	357	358	359	360	361	361	362
,56	363	364	365	366	366	367	368	369	370	371
,57	372	372	373	374	375	376	377	378	378	379
,58	380	381	382	383	384	385	385	386	387	388
,59	389	390	391	392	393	394	394	395	396	397
,60	398	399	400	401	402	403	404	405	406	406
,61	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416
,62	417	418	419	420	421	422	423	424	425	426
,63	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436
,64	437	438	439	440	441	442	443	444	445	446
,65	447	448	449	450	451	452	453	454	455	456
,66	457	458	459	460	461	462	463	465	466	467
,67	468	469	470	471	472	473	474	475	476	478
,68	479	480	481	482	483	484	485	486	488	489
,69	490	491	492	493	494	495	497	498	499	500
,70	501	502	504	505	506	507	508	509	511	512
,71	513	514	515	516	518	519	520	521	522	524
,72	525	526	527	528	530	531	532	533	535	536
,73	537	538	540	541	542	543	545	546	547	548
,74	550	551	552	553	555	556	557	558	560	561
,75	562	564	565	566	568	569	570	571	573	574
,76	575	577	578	579	581	582	583	585	586	587
,77	589	590	592	593	594	596	597	598	600	601
,78	603	604	605	607	608	610	611	612	614	615
,79	617	618	619	621	622	624	625	627	628	630
,80	631	632	634	635	637	638	640	641	643	644
,81	646	647	649	650	652	653	655	656	658	659
,82	661	662	664	665	667	668	670	671	673	675
,83	676	678	679	681	682	684	685	687	689	690
,84	692	693	695	697	698	700	701	703	705	706
,85	708	710	711	713	714	716	718	719	721	723
,86	724	726	728	729	731	733	735	736	738	740
,87	741	743	745	746	748	750	752	753	755	757
,88	759	760	763	764	766	767	769	771	773	774
,89	776	778	780	782	783	785	787	789	791	793
,90	794	796	798	800	802	804	805	807	809	811
,91	813	815	817	818	820	822	824	826	828	830
,92	832	834	836	838	839	840	843	845	847	849
,93	851	853	855	857	859	861	863	865	867	869
,94	871	873	875	877	879	881	883	885	887	889
,95	891	893	895	897	899	902	904	906	908	910
,96	912	914	916	918	920	923	925	927	929	931
,97	933	935	938	940	942	944	946	948	951	953
,98	955	957	959	962	964	966	968	971	973	975
,99	977	979	982	984	986	989	991	993	995	998

ISBN 979-462-883-2

Buku ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan (BSNP) dan telah dinyatakan layak sebagai buku teks pelajaran berdasarkan Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 34 Tahun 2008 tanggal 10 Juli tentang Penetapan Buku Teks Pelajaran yang Memenuhi Syarat Kelayakan untuk Digunakan dalam Proses Pembelajaran

HET(Harga Eceran Tertinggi) Rp.13.639,-