Bandung Arry S., dkk. TEKNIK OTOMASI INDUSTRI JILID 2 untuk SMK

BUKU SEKOLAH bse ELEKTRONIK

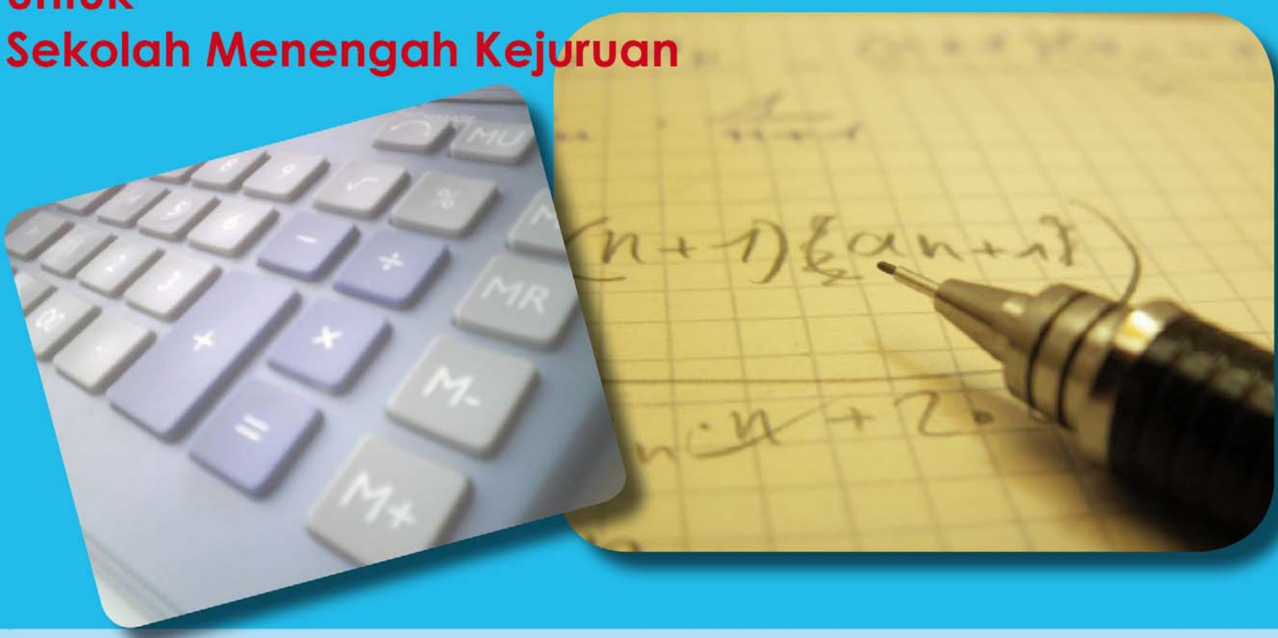
JILID 2

Bandung Arry S., dkk.

Matematika SMK Bisnis dan Manajemen

untuk

Sekolah Menengah Kejuruan



Direktorat Pembinaan Sekolah Menengah Kejuruan
Direktorat Jenderal Manajemen Pendidikan Dasar dan Menengah
Departemen Pendidikan Nasional

Bandung Arry Sanjoyo dkk

MATEMATIKA BISNIS DAN MANAJEMEN

SMK

JILID 2

Direktorat Pembinaan Sekolah Menengah Kejuruan
Direktorat Jenderal Manajemen Pendidikan Dasar dan Menengah
Departemen Pendidikan Nasional

MATEMATIKA BISNIS DAN MANAJEMEN

Untuk SMK

JILID 2

Penulis : Bandung Arry Sanjoyo
Sri Suprapti
Nur Asyiah
Dian Winda S

Editor : Erna Apriliani

Ukuran Buku : 17,6 x 25 cm

SAN m

SANJOYO, Bandung Arry
Matematika Bisnis dan Manajemen untuk SMK Jilid 2 /oleh Bandung Arry Sanjoyo, Sri Suprapti, Nur Asyiah, Dian Winda S ---- Jakarta : Direktorat Pembinaan Sekolah Menengah Kejuruan, Direktorat Jenderal Manajemen Pendidikan Dasar dan Menengah, Departemen Pendidikan Nasional, 2008.
xii, 180 hlm
ISBN : 978-602-8320-73-3
ISBN : 978-602-8320-75-7

Diterbitkan oleh
Direktorat Pembinaan Sekolah Menengah Kejuruan
Direktorat Jenderal Manajemen Pendidikan Dasar dan Menengah
Departemen Pendidikan Nasional
Tahun 2008

KATA SAMBUTAN

Puji syukur kami panjatkan kehadirat Allah SWT, berkat rahmat dan karunia Nya, Pemerintah, dalam hal ini, Direktorat Pembinaan Sekolah Menengah Kejuruan Direktorat Jenderal Manajemen Pendidikan Dasar dan Menengah Departemen Pendidikan Nasional, telah melaksanakan kegiatan penulisan buku kejuruan sebagai bentuk dari kegiatan pembelian hak cipta buku teks pelajaran kejuruan bagi siswa SMK. Karena buku-buku pelajaran kejuruan sangat sulit di dapatkan di pasaran.

Buku teks pelajaran ini telah melalui proses penilaian oleh Badan Standar Nasional Pendidikan sebagai buku teks pelajaran untuk SMK dan telah dinyatakan memenuhi syarat kelayakan untuk digunakan dalam proses pembelajaran melalui Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 45 Tahun 2008 tanggal 15 Agustus 2008.

Kami menyampaikan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada seluruh penulis yang telah berkenan mengalihkan hak cipta karyanya kepada Departemen Pendidikan Nasional untuk digunakan secara luas oleh para pendidik dan peserta didik SMK.

Buku teks pelajaran yang telah dialihkan hak ciptanya kepada Departemen Pendidikan Nasional ini, dapat diunduh (*download*), digandakan, dicetak, dialihmediakan, atau difotokopi oleh masyarakat. Namun untuk penggandaan yang bersifat komersial harga penjualannya harus memenuhi ketentuan yang ditetapkan oleh Pemerintah. Dengan ditayangkan *soft copy* ini diharapkan akan lebih memudahkan bagi masyarakat khsusnya para pendidik dan peserta didik SMK di seluruh Indonesia maupun sekolah Indonesia yang berada d luar negeri untuk mengakses dan memanfaatkannya sebagai sumber belajar.

Kami berharap, semua pihak dapat mendukung kebijakan ini. Kepada para peserta didik kami ucapkan selamat belajar dan semoga dapat memanfaatkan buku ini sebaik-baiknya. Kami menyadari bahwa buku ini masih perlu ditingkatkan mutunya. Oleh karena itu, saran dan kritik sangat kami harapkan.

Jakarta, 17 Agustus 2008
Direktur Pembinaan SMK

KATA PENGANTAR

Matematika merupakan suatu alat untuk berkomunikasi di bidang ilmu pengetahuan dan teknologi. Dengan matematika kita dapat mengungkapkan gejala – gejala alam, sosial, dan teknik dengan suatu ungkapan rumusan matematika yang tidak memuat makna ganda. Bahkan dengan berbantuan matematika kita dapat menyelesaikan permasalahan sosial, ekonomi, manajemen, dan teknik dengan penyelesaian yang akurat dan optimal. Fakta menunjukkan bahwa beberapa pemenang nobel untuk bidang ekonomi atau teknik berasal dari matematikawan.

Oleh karena itu, mempelajari dan menguasai matematika dari usia sekolah dasar maupun lanjut merupakan suatu kebutuhan. Buku ini disusun dengan memperhatikan konsep berfikir matematis dan selalu mengaitkannya dalam kehidupan sehari-hari, khususnya pada permasalahan ekonomi, bisnis, dan manajemen. Pada setiap konsep kecil yang dituangkan dalam suatu sub bab selalu dikaitkan dengan permasalahan sehari – hari. Juga pada setiap bab diawali dengan kalimat motivasi, pembuka dan perangsang bagi pembaca untuk mengerti dari awal, kira-kira akan dipakai seperti apa dan dimana.

Belajar matematika tidak cukup hanya dengan mengerti konsep saja. Harus disertai dengan banyak latihan olah pikir serupa dengan contoh – contoh yang diberikan. Untuk itu, pada setiap akhir sub bab diberikan banyak soal – soal sebagai latihan dalam menguasai konsep dan miningkatkan ketrampilan olah pikir dan penyelesaian permasalahan.

Susunan materi di buku ini berpedoman pada silabus dan GBPP yang telah disusun oleh Depdiknas untuk matematika tingkat SMK bidang Bisnis dan Perkantoran. Sehingga rujukan yang dipakai banyak menggunakan buku matematika untuk SMK dan SMA/MA. Namun demikian juga memperhatikan beberapa buku matematika untuk perguruan tinggi maupun buku aplikasi matematika. Dengan harapan bahwa konsep dan aplikasi matematika tidak terabaikan, juga tingkatan penyampaian materi sangat memperhatikan usia sekolah SMK.

Banyak kata motivasi dan kalimat definitif diambil dari buku rujukan yang dipakai. Untuk suatu topik gagasan, sering diambil dari gabungan beberapa buku yang kemudian diungkapkan kedalam suatu kalimat yang sekiranya akan mudah dimengerti oleh siswa SMK.

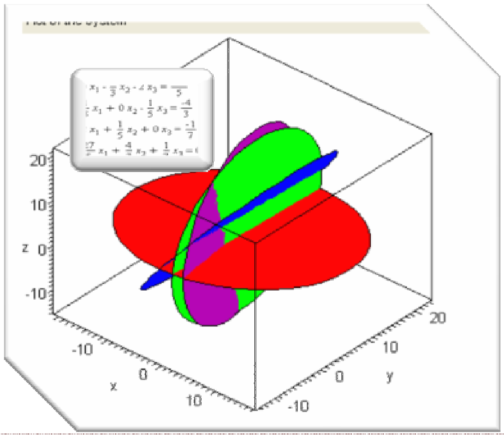
Penulis sangat menyadari bahwa buku ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, kritik dan saran untuk perbaikan sangat diharapkan oleh penulis.

Penulis.

DAFTAR ISI

JILID 2

JILID 3



Bab

4

PROGRAM LINEAR

3. Program Linear

Program linear (*linear programming*) adalah metode penyelesaian suatu persoalan dimana terdapat dua aktifitas atau lebih yang saling berhubungan dengan keterbatasan sumber. Dengan kata lain program linear adalah suatu cara untuk menyelesaikan persoalan melalui model matematika yang disusun berdasarkan persoalan dalam bentuk sistem persamaan atau pertidaksamaan linear.

Permasalahan yang terkait dengan program linear biasanya berkaitan dengan menentukan nilai optimum. Nilai optimum dapat berupa nilai maksimum atau nilai minimum. Pencarian nilai optimum berdasarkan peubah yang ada (misal peubah x dan y). Struktur perumusan program linear adalah menentukan nilai optimum dari *fungsi objektif* (tujuan) dengan kendala berbentuk sistem pertidaksamaan linear.

Program linear berkembang cukup pesat, terutama pemanfaatannya dalam bidang manajemen produksi, pemasaran, distribusi, transportasi, bidang lainnya yang terkait dengan optimasi.

Setelah siswa belajar program linear, siswa mempunyai pemahaman dan ketrampilan dalam penerapan sistem pertidaksamaan linear dengan dua peubah. Juga mempunyai ketrampilan dalam membuat model matematika program linear dan menyelesaikannya.

Sebagai ilustrasi, seorang pedagang memiliki modal belanja barang yang terbatas, ingin mendapatkan barang-barang dagangan yang akan memberikan keuntungan sebanyak-banyaknya. Agar mendapatkan keuntungan yang maksimal, pedagang tersebut harus memilih barang apa saja yang akan dibeli dan berapa jumlah rupiah akan dipakai untuk membayar tiap jenis barang dagangan yang dipilih. Problem demikian ini dapat diformulasikan dan diselesaikan dengan menggunakan program linear.

3.1 SISTEM PERTIDAKSAMAAN LINEAR

Sebelum program linear dipelajari secara mendalam, pada subbab ini akan dipelajari terlebih dahulu mengenai sistem pertidaksamaan linear dan menentukan himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear tersebut.

3.1.1 PERTIDAKSAMAAN LINEAR DAN DAERAH PENYELESAIANNYA

Pada ilustrasi sebelumnya, misalkan pedagang tersebut hanya membawa uang untuk belanja barang dagangan sebesar 6 juta rupiah. Barang yang akan dibeli adalah buah apel dan buah mangga. Berdasarkan data penjualan tahun sebelumnya, pedagang menghendaki untuk membeli banyaknya apel dua kali lipat banyaknya mangga. Misal peubah x menyatakan uang (dalam jutaan rupiah) yang akan dipakai membeli apel. Peubah y menyatakan uang (dalam jutaan rupiah) yang akan dipakai membeli mangga.

Besarnya uang untuk belanja apel ditambah besarnya uang untuk belanja barang tidak boleh melebihi uang yang dibawa. Secara matematis, pernyataan tersebut dapat dituliskan menjadi

$$2x + y \le 6.$$

Contoh pernyataan matematika tersebut dinamakan dengan pertidaksamaan linear. Karena pertidaksamaan tersebut terdiri dari dua peubah (*x* dan *y*) maka pertidaksamaan tersebut dinamakan dengan pertidaksamaan linear dengan dua peubah. Bentuk umum dari pertidaksamaan linear dengan dua peubah didefinisikan berikut ini.

DEFINISI 3.1.1 :

Pertidaksamaan linear dengan dua peubah merupakan pertidaksamaan yang memuat dua peubah dan mempunyai bentuk

$$ax + by < c \qquad (4.1.1)$$

dengan *a, b*, dan *c* adalah konstanta real. Nilai *a* dan *b* tidak boleh keduanya nol. Tanda < dapat digantikan dengan >, ≤, atau ≥.

Beberapa contoh bentuk pertidaksamaan linear.

a. $2x + y < 6$ b. $2x + y \le 6$ c. $2x \le 5$

d. $7x + 3y > 210$ e. $4x + 5y \ge 60$ f. $y \ge 3$

Pandang pertidaksamaan

$$2x + y \leq 6 \qquad (4.1.2)$$

Mari kita melakukan pengamatan sebagai berikut.

- Jika x=1 dan y=3 disubstitusikan ke pertidaksamaan (4.1.2), maka diperoleh pernyataan

  $$2(1) + 3 \leq 6 \text{ atau } 5 \leq 6$$

  Pernyataan tersebut bernilai benar, yaitu bahwa "5 ≤ 6" adalah benar.
- Jika x=7 dan y=1 disubstitusikan ke pertidaksamaan (4.1.2), maka diperoleh pernyataan

  $$2(7) + 1 \leq 6 \text{ atau } 15 \leq 6$$

  Pernyataan tersebut bernilai salah.
- Jika x=3 dan y=0 disubstitusikan ke pertidaksamaan (4.1.2), maka diperoleh pernyataan

  $$2(3) + 0 \leq 6 \text{ atau } 6 \leq 6$$

  Pernyataan tersebut bernilai benar.
- Jika x=3 dan y=2 disubstitusikan ke pertidaksamaan (4.1.2), maka diperoleh pernyataan

  $$2(3) + 2 \leq 6 \text{ atau } 8 \leq 6$$

  Pernyataan tersebut bernilai salah.

Dari pengamatan tersebut tampak bahwa ada beberapa pasang nilai x dan y yang menjadikan pertidaksamaan bernilai benar. Ada beberapa pasang nilai x dan y yang menjadikan pertidaksamaan bernilai salah.

Pasangan nilai *x* dan *y* yang menjadikan pertidaksamaan (4.1.2) bernilai benar dinamakan **penyelesaian dari pertidaksamaan** tersebut. Jika pasangan yang demikian dihimpun, akan membentuk suatu **himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan** yang dimaksud.

Himpunan penyelesaian dari $ax + by < c$ adalah

$$\{(x, y) \mid ax + by < c\}$$

Himpunan penyelesaian tersebut berupa suatu daerah pada bidang koordinat kartesian.

- **Menggambarkan daerah penyelesaian dari $ax + by < c$**

Daerah penyelesaian pertidaksamaan $ax + by < c$ pada bidang koordinat kartesian dapat dicari dengan langkah-langkah:

i. Pertidaksamaan $ax + by < c$ dirubah menjadi sebuah persamaan garis $ax + by = c$.

ii. Gambarkan garis lurus $ax + by = c$ pada bidang kartesian.

  - Jika *a*=0 maka persamaan $ax + by = c$ menjadi $by = c$ atau $y = \frac{c}{b}$.

    Gambar dari persamaan $y = \frac{c}{b}$ berupa garis mendatar sejajar sumbu *x* dan berjarak nilai mutlak dari $\frac{c}{b}$.

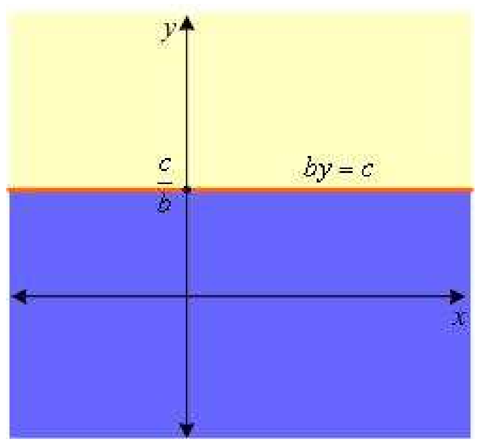
    Dengan adanya garis ini, daerah bidang kartesian terbagi menjadi tiga bagian daerah, yaitu:

    ✓ Daerah yang terdiri dari titik-titik yang memenuhi $by = c$, daerah pada garis.

✓ Daerah yang terdiri dari titik-titik yang memenuhi $by > c$, daerah di atas garis.

✓ Daerah yang terdiri dari titik-titik yang memenuhi $by < c$, daerah di bawah garis.

Seperti tampak pada Gambar 4.1.1, daerah bidang kartesian terbagai menjadi: daerah pada garis, daerah di atas garis, dan daerah di bawah garis.



Gambar 4.1.1

- Jika *b*=0 maka persamaan $ax + by = c$ menjadi $ax = c$ atau $x = \frac{c}{a}$.

  Gambar dari persamaan $x = \frac{c}{a}$ berupa garis tegak sejajar sumbu *y* dan berjarak nilai mutlak dari $\frac{c}{a}$.

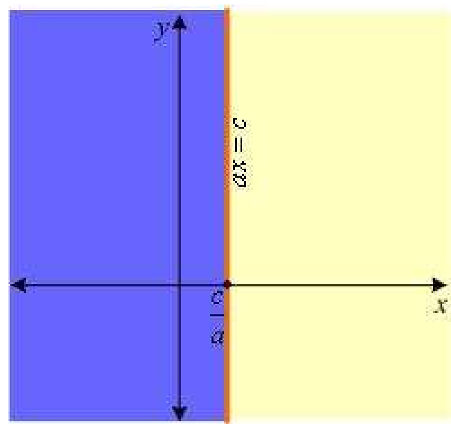
  Dengan adanya garis ini, daerah bidang kartesian terbagi menjadi tiga bagian daerah, yaitu:

  ✓ Daerah yang terdiri dari titik-titik yang memenuhi $ax = c$, daerah pada garis.

✓ Daerah yang terdiri dari titik-titik yang memenuhi $ax > c$, daerah di sebelah kanan garis.

✓ Daerah yang terdiri dari titik-titik yang memenuhi $ax < c$, daerah di sebelah kiri garis.

Seperti tampak pada Gambar 4.1.2, daerah bidang kartesian terbagai menjadi: daerah pada garis, daerah di sebelah kanan garis, dan daerah di sebelah kiri garis.



Gambar 4.1.2

- Jika *a* dan *b* keduanya tidak nol maka gambar dari persamaan $ax + by = c$ berupa garis miring.

  Untuk menggambar $ax + by = c$, dapat dilakukan dengan cara:

  - Mencari titik potong dengan sumbu *x*:

    Titik potong garis dengan sumbu *x* terjadi bila nilai *y*=0.

    Diperoleh $ax = c$ atau $x = \frac{c}{a}$. Jadi titik potong garis dengan sumbu *x* adalah $\left(\frac{c}{a}, 0\right)$.

  - Mencari titik potong dengan sumbu *y*:

    Titik potong garis dengan sumbu *y* terjadi bila nilai *x*=0.

Diperoleh $by = c$ atau $y = \frac{c}{b}$. Jadi titik potong garis dengan sumbu *y* adalah $\left(0, \frac{c}{b}\right)$.

- Buat garis lurus yang melalui titik $\left(\frac{c}{a}, 0\right)$ dan $\left(0, \frac{c}{b}\right)$.

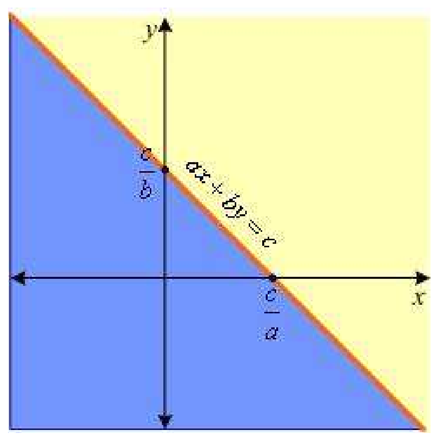
Dengan adanya garis ini, daerah bidang kartesian terbagi menjadi tiga bagian daerah, yaitu:

✓ Daerah yang terdiri dari titik-titik yang memenuhi $ax + by = c$, daerah pada garis.

✓ Daerah yang terdiri dari titik-titik yang memenuhi $ax + by > c$.

✓ Daerah yang terdiri dari titik-titik yang memenuhi $ax + by < c$.

Seperti tampak pada Gambar 4.1.3, yaitu daerah pada garis, di atas garis, dan daerah di bawah garis.



Gambar 4.1.3 Daerah penyelesaian pertidaksamaan

iii. Ambil titik uji yang berasal dari salah satu daerah yang dipisahkan garis dan substitusikan ke pertidaksamaan, apakah memenuhi pertidaksamaan tersebut atau tidak.

iv. Menentukan daerah penyelesaian.

- ✓ Jika pada langkah (iii) hasilnya memenuhi maka daerah yang memuat titik uji tersebut adalah daerah penyelesaian.
- ✓ Jika pada langkah (iii) hasilnya tidak memenuhi maka daerah yang memuat titik uji tersebut bukan daerah penyelesaian.

CONTOH 3.1.1

Gambarkan daerah penyelesaian dari $2x + y < 6$.

Penyelesaian:

Kita ikuti langkah-langkah seperti di atas.

i. Pertidaksamaan dirubah menjadi $2x + y = 6$.

ii. Gambarkan garis lurus $2x + y = 6$ pada bidang kartesian, seperti berikut ini.

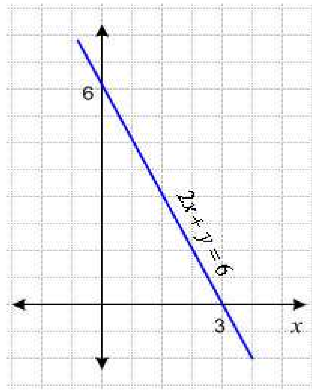
- Titik potong dengan sumbu *x* terjadi apabila *y*=0.

  Diperoleh nilai $x = \frac{6}{2} = 3$.

- Titik potong dengan sumbu *y* terjadi apabila *x*=0.

  Diperoleh nilai $y = \frac{6}{1} = 6$

Tarik garis lurus yang melalui titik $(3, 0)$ dan $(0,6)$.



iii. Ambil titik uji yang berasal dari salah satu daerah yang dipisahkan garis, Misal kita ambil titik (0,0).

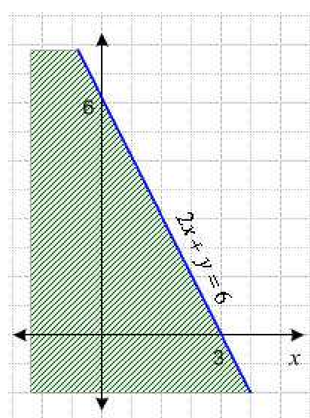
Substitusikan ke pertidaksamaan, diperoleh

$$2(0) + 0 < 6$$

iv. Menentukan daerah penyelesaian.

Hasil langkah (iii) merupakan pernyataan yang benar / memenuhi pertidaksamaan.

Oleh karena itu, daerah di bawah garis biru yang memuat (0,0) merupakan daerah penyelesaiannya. Daerah penyelesaian seperti tampak pada gambar berikut ini adalah daerah yang diarsir.



Pada subbab selanjutnya membahas tentang sistem pertidaksamaan linear dan penyelesaianya.

3.1.2 SISTEM PERTIDAKSAMAAN LINEAR DAN DAERAH PENYELESAIANNYA

Kumpulan dari pertidaksamaan linear yang terdiri dari dua atau lebih pertidaksamaan linear akan membentuk suatu **sistem pertidaksamaan linear**. Pada buku ini dibatasi pada pertidaksamaan linear dengan dua peubah.

DEFINISI 3.1.2 :

Sistem pertidaksamaan linear dengan dua peubah merupakan dua atau lebih pertidaksamaan linear dengan dua peubah dan mempunyai bentuk

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &< c_1 \\ a_2x + b_2y &< c_2 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_mx + b_my &< c_m \end{aligned} \qquad (4.1.3)$$

dengan a_i, b_i, dan c_i adalah konstanta real, i=1, 2, ..., m. Nilai a_i dan b_i tidak boleh keduanya nol. Tanda < dapat digantikan dengan >, ≤, atau ≥.

Sistem pertidaksamaan linear dapat digambarkan dalam bidang Kartesian. Daerah pada bidang Kartesian yang memenuhi sistem pertidaksamaan linear merupakan himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear.

Himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear 4.1.3 adalah

$\{(x, y) \mid \text{berlaku } a_i x + b_i y < c_i, i = 1,2, \ldots, m\}$

Himpunan penyelesaian tersebut berupa suatu daerah pada bidang koordinat kartesian. Untuk mendapatkan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berbentuk 4.1.3 digunakan langkah-langkah sebagai berikut.

i. Ubahlah setiap pertidaksamaan $a_i x + b_i y < c_i$ menjadi persamaan $a_i x + b_i y < c_i$.

ii. Setiap persamaan garis $a_i x + b_i y < c_i$ digambar pada bidang Kartesian. Cara penggambaran garis seperti sebelumnya.

   Garis – garis ini membentuk daerah – daerah yang dibatasi oleh garis – garis pada bidang kartesian. Daerah – daerah ini merupakan calon himpunan penyelesaian.

iii. Ambil titik uji yang berasal dari salah satu daerah yang dipisahkan garis dan substitusikan ke setiap pertidaksamaan 4.2.1, apakah memenuhi semua pertidaksamaan tersebut atau tidak.

iv. Menentukan daerah penyelesaian.
   - ✓ Jika pada langkah (iii) hasilnya memenuhi maka daerah yang memuat titik uji tersebut adalah daerah penyelesaian.
   - ✓ Jika pada langkah (iii) hasilnya tidak memenuhi maka daerah yang memuat titik uji tersebut bukan daerah penyelesaian.

   Arsirlah daerah penyelesaian dan daerah yang tidak terarsir bukan merupakan daerah penyelesaian.

Untuk mempermudah pengertian dan pemahaman, perhatian contoh-contoh berikut.

CONTOH 3.1.2

Tentukan daerah himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan

$2x + y \leq 6,$

$x \geq 0,$

$y \geq 0.$

Penyelesaian:

Pada contoh ini, sengaja dipilih pertidaksamaan $x \geq 0$ dan $y \geq 0$. Mengingat banyak kasus nyata yang mempunyai penyelesaian bukan bilangan nengatif. Misalnya hasil produksi suatu pabrik/perusahaan, jumlah tenaga kerja yang dipakai dan lain sebagainya.

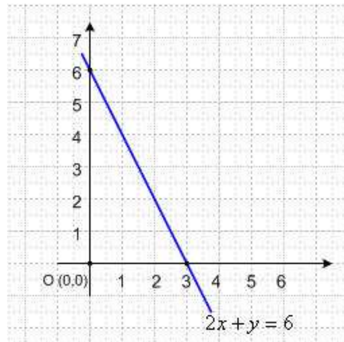
i. Ubahlah setiap pertidaksamaan $a_i x + b_i y < c_i$ menjadi persamaan $a_i x + b_i y < c_i$. Sehingga diperoleh:

$2x + y = 6,$

$x = 0,$

$y = 0.$

ii. Masing-masing persamaan $2x + y = 6,\ x = 0,$ dan $y = 0$ digambar pada bidang Kartesian. Diperoleh gambar berikut ini.



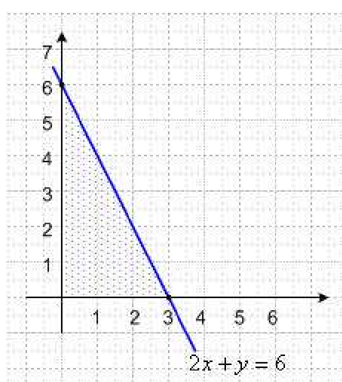
iii. Ambil titik uji yang berasal dari salah satu daerah yang dipisahkan garis dan substitusikan ke setiap pertidaksamaan 4.2.1.

Misal kita ambil titik (1,1), diperoleh hasil substitusi sebagai berikut.

- ✓ $2(1)+1 \leq 6$, memenuhi (bernilai benar)
- ✓ $1 \geq 0$, memenuhi (bernilai benar)
- ✓ $1 \geq 0$, memenuhi (bernilai benar)

iv. Menentukan daerah penyelesaian.

Pengambilan titik pada (iii) memenuhi semua pertidaksamaan yang ada. Oleh karena itu, daerah (terkecil) yang memuat titik tersebut merupakan daerah penyelesaian. Seperti digambarkan pada daerah arsiran pada gambar di bawah ini.



Contoh 4.1.3

Tentukan daerah himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan

$x - y \leq 1$,

$2x + y \leq 6$,

$x \geq 0$,

$y \geq 1$.

Penyelesaian:

i. Ubahlah setiap pertidaksamaan yang ada menjadi:

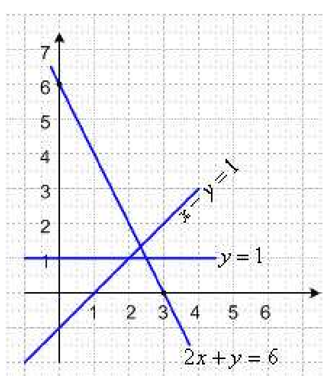
$x - y = 1$,

$2x + y = 6$,

$x = 0$,

$y = 1$.

ii. Masing-masing persamaan $x - y = 6$, $2x + y = 6$, $x = 0$, dan $y = 0$ digambar pada bidang Kartesian. Diperoleh gambar berikut ini.



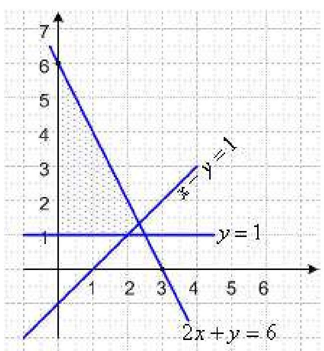
iii. Ambil titik uji yang berasal dari salah satu daerah yang dipisahkan garis dan substitusikan ke setiap pertidaksamaan 4.2.1.

Misal kita ambil titik (1,2), diperoleh hasil substitusi sebagai berikut.

- ✓ 1-2 ≤ 1, memenuhi (bernilai benar)
- ✓ 2(1)+1 ≤ 6, memenuhi.
- ✓ 1 ≥ 0, memenuhi.
- ✓ 1 ≥ 1, memenuhi.

iv. Menentukan daerah penyelesaian.

Pengambilan titik pada (iii) memenuhi semua pertidaksamaan yang ada. Oleh karena itu, daerah (terkecil) yang memuat titik tersebut merupakan daerah penyelesaian. Seperti digambarkan pada daerah arsiran pada gambar di bawah ini.



RANGKUMAN

- **Pertidaksamaan linear dengan dua peubah** merupakan pertidaksamaan yang memuat dua peubah yang berbentuk $ax + by < c$ dengan *a,* *b*, dan *c* adalah konstanta real. Nilai *a* dan *b* tidak boleh keduanya nol. Tanda < dapat digantikan dengan >, ≤, atau ≥.

- Himpunan penyelesaian dari $ax + by < c$ adalah $\{(x, y) \mid \text{berlaku } ax + by < c\}$.
- **Sistem pertidaksamaan linear dengan dua peubah** merupakan dua atau lebih pertidaksamaan linear dengan dua peubah.
- Himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear adalah himpunan dari pasangan koordinat (*x,y*) yang memenuhi semua pertidaksamaan dalam sistem pertidaksamaan linear.

SOAL LATIHAN 3-1

1. Gambarlah daerah penyelesaian dari pertidaksamaan dibawah ini :

   a. $x \le 9$
   b. $y \ge 3$
   c. $2 \le y \le 8$
   d. $4x \le 8$
   e. $y \ge x + 1$
   f. $1 \le x \le 8$

2. Gambarlah daerah penyelesaian dari pertidaksamaan dibawah ini :

   a. $3x + 2y \ge 6$
   b. $4x - 5y \ge 10$
   c. $2x + 3y \le 12$
   d. $6x + 7{,}5y \ge 15$
   e. $7x - 3y \le 21$

3. Gambarlah daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan dibawah ini :

a. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + 5y \leq 10$, $2x + 2y \leq 14$

c. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + 5y \leq 10$, $2x + 2y \geq 14$

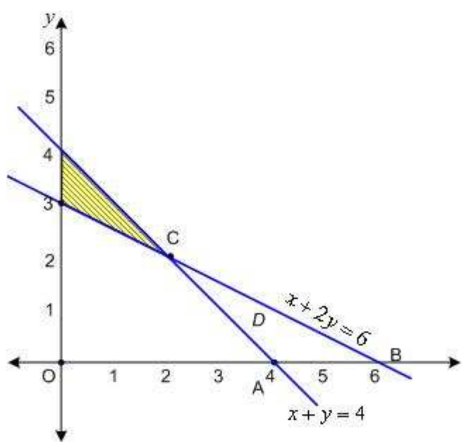
d. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 3$, $3x + 2y \leq 6$

e. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + 3y \leq 9$, $2x + y \geq 7$

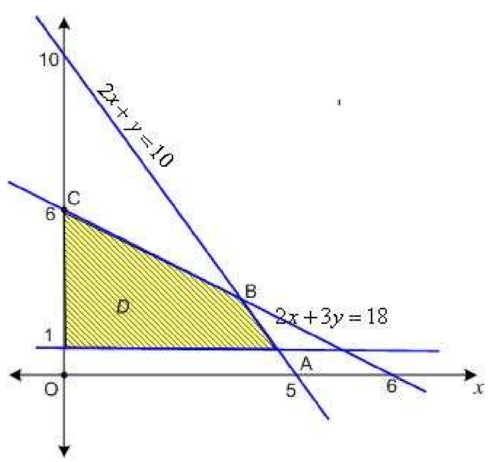
f. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $3x + y \leq 9$, $x + y \geq 5$

4. Misalkan daerah yang tidak diarsir adalah daerah penyelesaian dari suatu sistem pertidaksamaan. Tentukan sistem pertidaksamaan tersebut yang digambarkan dalam gambar berikut ini :

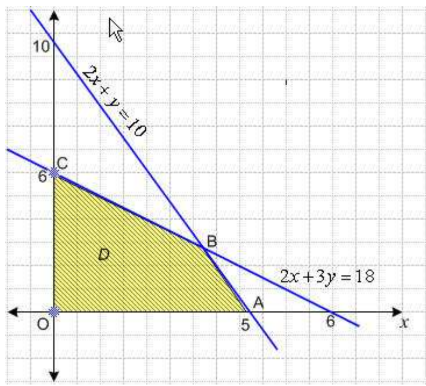
a.



b.



c.



5. Gambarlah daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan dibawah ini :
   a. $x + y \geq 1$, $x + y \leq 3$, $3x - 2y \leq 6$, $3x - 2y \geq -3$
   b. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 9$, $x \leq 6$
6. Gambarlah daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan dibawah ini :
   a. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \geq 4$, $x - 4y \geq 4$, dan $3x + 4y \leq 12$
   b. $x \geq 0$, $y \geq 1$, $x - 4y \geq 4$, $y + 4x \leq 4$ dan $3x + 4y \leq 12$
   c. $x \geq 1$, $y \geq 0$, $x + 2y \geq 5$, $x + y \leq 4$, dan $3x + 4y \leq 12$

3.2 MODEL MATEMATIKA DARI PROGRAM LINEAR

Banyak permasalahan dalam bidang ekonomi, bisnis, atau pertanian dapat diselesaikan dengan menggunakan program linear. Namun sebelum diselesaikan dengan program linear, permasalahan tersebut harus diformulasikan dalam bentuk model matematika terlebih dahulu, baik dalam bentuk persamaan ataupun pertidaksamaan linear.

Model matematika adalah pernyataan suatu persoalan dalam bentuk bahasa matematika dengan menggunakan persamaan atau pertidaksamaan matematika. Model matematika yang dibahas disini adalah model matematika program linear. Permasalahan program linear biasanya berupa mencari nilai optimal (maksimal atau minimal) dari suatu fungsi objektif (tujuan) dengan kendala sistem pertidaksamaan linear.

- **Pembentukan Model Matematika dari Program Linear**

Seperti diterangkan diatas, agar suatu permasalahan dapat diselesaikan dengan program linear, haruslah terlebih dahulu permasalahan tersebut diubah dalam bentuk model matematika. Dari permasalahan berupa kalimat verbal, akan diubah kedalam bentuk persamaan atau pertidaksamaan metematika.

Bentuk umum dari model matematika program linear dengan dua peubah adalah:

$$\text{Optimalkan } z = ax + by$$

dengan *a, b* adalah konstanta, dan dengan kendala suatu sistem pertidaksamaan linear sebagai berikut.

$$\begin{array}{l} a_1x + b_1y < c_1 \\ a_2x + b_2y < c_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \\ a_mx + b_my < c_m \end{array}$$

dengan a_i, b_i, dan c_i adalah konstanta real, i=1, 2, ..., m. Nilai a_i dan b_i tidak boleh keduanya nol. Tanda < dapat digantikan dengan >, ≤, atau ≥.

Untuk membentuk model matematika program linear perhatikan hal berikut ini:

1. Tentukan peubah x dan y yang berkaitan dengan permasalahan.
2. Dari peubah yang ada, susunlah keterkaitan dari peubah menjadi sebuah fungsi onbjektif dan sistem pertidaksamaan.

Agar lebih memahami pembentukan model matematika, perhatikan baik-baik contoh-contoh permasalahan nyata berikut ini :

CONTOH 3.2.1

Pada suatu pabrik, untuk memproduksi botol plastik 500 cc diperlukan proses di mesin A selama 3 jam dan mesin B selama 2 jam. Untuk memproduksi botol kaca 500 cc diperlukan proses di mesin A selama 1 jam dan mesin B selama 4 jam. Dalam setiap harinya mesin A bekerja paling lama 18 jam dan mesin B paling lama 20 jam. Jika perusahaan tersebut setiap harinya memproduksi x botol plastik dan y botol kaca. Tentukan model matematika dalam x dan y yang menggambarkan permasalahan produksi tersebut.

Penyelesaian:

Dalam setiap hari, mesin A beroduksi selama $3x$ jam untuk botol plastik. Dan berproduksi selema y jam untuk botol gelas. Karena ada batasan bahwa mesin A bekerja tidak lebih dari 18 jam dalam setiap hari, maka diperoleh pertidaksamnaan $3x + y \leq 18$.
Dalam setiap hari, mesin B beroduksi selama $2x$ jam untuk botol plastik. Dan berproduksi selema $4y$ jam untuk botol gelas. Karena ada batasan bahwa mesin A bekerja tidak lebih dari 20 jam dalam setiap hari, maka diperoleh pertidaksamnaan $2x + 4y \leq 20$ atau $x + 2y \leq 10$.
Dinyatakan bahwa setiap hari memproduksi x buah botol plasik dan y buah botol gelas. Sehingga diperoleh pertidaksamaan $x \geq 0$ dan $y \geq 0$.

Jadi kondisi produksi perusahaan ini dapat dimodelkan dalam bentuk sistem pertidaksamaan linear sebagai berikut.

$3x + y \leq 18$,

$x + 2y \leq 10$,

$x \geq 0$,

$y \geq 0$.

CONTOH 3.2.2

Suatu industri rumahan memproduksi dua jenis pakaian yang bahannya adalah kain katun dan kain sutera. Model pakaian I memerlukan 1 *m* kain katun dan 3 *m* kain sutera. Model pakaian II memerlukan 2 *m* kain katun dan 2 *m* kain sutera. Kain yang dipunyai adalah 80 *m* kain katun dan 120 *m* kain sutera. Bahan – bahan lain sudah tersedia cukup. Jika harga jual pakaian I adalah Rp 90.000 dan pakaian jenis II adalah Rp 75.000, maka tentukan banyaknya pakai jenis I dan jenis II yang harus diproduksi agar pendapatannya maksimum.

Penyelesaian:

- Menentukan peubah – peubah yang berkaitan:

  Misal: x menyatakan banyaknya pakaian jenis I yang dibuat.

  y menyatakan banyaknya pakaian jenis II yang dibuat.

- Keterkaitan antar peubah.

  ✓ Ada 80 meter kain katun,

  Dipakai untuk satu pakain jenis I sebanyak 1 *m.* Sehingga untuk x buah pakaian jenis I membutuhkan kain katun sebanyak x m.

  Dipakai untuk satu pakain jenis II sebanyak 2 *m.* Sehingga untuk y buah pakaian jenis II membutuhkan kain katun sebanyak $2y$ m.

  Diperoleh hubungan $x + 2y \leq 80$.

  ✓ Ada 120 meter kain sutera,

Dipakai untuk satu pakain jenis I sebanyak 3 *m.* Sehingga untuk x buah pakaian jenis I membutuhkan kain sutera sebanyak $3x$ m.

Dipakai untuk satu pakain jenis II sebanyak 2 *m.* Sehingga untuk y buah pakaian jenis II membutuhkan kain katun sebanyak $2y$ m.

Diperoleh hubungan $3x + 2y \leq 120$.

✓ Satu pakaian jenis I mempunyai harga jual Rp 90.000. Jika diproduksi x buah dengan $x \geq 0$, maka pendapatan dari pakaian jenis I adalah Rp 90.000 x. Sedangkan satu pakaian jenis II mempunyai harga jual Rp 75.000. Jika diproduksi y buah dengan $y \geq 0$, maka pendapatan dari pakaian jenis II adalah Rp 75.000 y. Sehingga total pendapatan yang diinginkan adalah

$$\text{Maks } 90.000\,x + 75.000\,y$$

Jadi tersusun model matematika sebagai berikut.

$$\text{Maks } 90.000\,x + 75.000\,y$$

Dengan kendala:

$$\begin{aligned} x + 2y &\leq 80, \\ 3x + 2y &\leq 120, \\ x &\geq 0, \\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

CONTOH 3.2.3

PT. Sabun Bersih bermaksud membuat 2 jenis sabun unuk mencuci pakaian dan peralatan dapur yaitu sabun batangan dan sabun colek. Untuk itu dibutuhkan 2 macam zat kimia yaitu A dan B dengan jumlah persediaan A = 200 kg dan B = 260 kg.

Untuk membuat 1 kg sabun batangan diperlukan 2 kg bahan A dan 6 kg bahan B. Untuk membuat 1 kg sabun colek dibutuhkan 5 kg bahan A dan 3 kg bahan B. Jika keuntungan yang akan diperoleh untuk setiap membuat 1 kg sabun batangan adalah Rp 200 dan untuk setiap membuat

1 kg sabun colek adalah Rp 300. Berapa kg jumlah sabun batangan dan sabun colek yang sebaiknya dibuat agar keuntungan yang akan diperoleh adalah maksimal.

Penyelesaian:

Langkah – langkah sesuai dengan sebelumnya, dan :

Misalkan jumlah sabun batangan yang akan dibuat adalah x dan jumlah sabun colek yang akan dibuat adalah y. Keuntungan yang akan diperoleh adalah berupa fungsi $200x + 300y$ yang selanjutnya disebut ***fungsi obyektif* z.**

Untuk membuat sejumlah x sabun batangan dibutuhkan sejumlah $2x$ bahan A dan $6x$ bahan B. Untuk membuat sejumlah y sabun colek dibutuhkan $5y$ bahan A dan $3y$ bahan B.

Karena jumlah persediaan bahan A dan B yang terbatas yaitu 200 kg bahan A dan 260 kg bahan B, maka jumlah bahan A dan B merupakan jumlahan dari bahan yang dipakai untuk x dan y, secara tabel dinyatakan sebagai berikut.

Tabel 1

Bahan	Sabun Batangan	Sabun Colek	Persediaan Bahan
A	2 kg	5 kg	200 kg
B	6 kg	3 kg	260 kg

Adapun model matematika dari permasalahan di atas adalah sebagai berikut.

Karena x dan y menyatakan banyaknya sabun batangan dan sabun colek, maka harus berlaku $x, y \in R$ dan $x \geq 0$, $y \geq 0$.

$$2x + 5y \leq 200$$

$$6x + 3y \leq 260$$

Sedangkan keuntungan yang diinginkan adalah maksimal, diperoleh

Maks z= 200 x + 300 y

Model matematika untuk permasalahan di atas, secara lengkap dituliskan sebagai berikut.

Maks z= 200 x + 300 y

Dengan kendala sistem persamaan linear:

$2x + 5y \leq 200$

$6x + 3y \leq 260$

$x \geq 0$,

$y \geq 0$.

CONTOH 3.2.4

Seorang petani ikan memberikan dua jenis produk makanan suplemen untuk kolam ikannya. Produk makanan suplemen kemasan satu botol mengandung 5 gram zat A dan 2 gram zat B. Sedangkan produk makanan suplemen kemasan satu kontong plastik mengandung 3 gram zat dan 4 gram zat B. Pada setiap musim tebar ikan, petani tersebut membutuhkan paling sedikit 30 gram zat A dan 24 gram zat B untuk kesuksesan ikannya. Jika harga makanan suplemen satu kemasan botol adalah Rp 50.000 dan untuk kemasan kantong plastik adalah Rp 40.000, maka tentukan banyaknya makanan suplemen kemasan botol dan kemasan kantong plastik yang harus dibeli agar biaya pemeliharaan ikannya minimal.

Penyelesaian:

- Menentukan peubah – peubah yang berkaitan:

  Misal: x menyatakan banyaknya makanan suplemen kemasan botol yang dibeli.

  y menyatakan banyaknya makanan suplemen kemasan kantong plastik yang dibeli.
- Keterkaitan antar peubah.

✓ Ada paling sedikit 30 gram kebutuhan zat A,

Dari produk satu kemasan botol sebanyak 5 gram. Sehingga pembelian x buah produk kemasan botol diperoleh zat A sebanyak $5x$ gram.

Dari produk satu kemasan kantong palstik sebanyak 3 gram. Sehingga pembelian y buah produk kemasan kantong plastik diperoleh zat A sebanyak $3y$ gram.

Diperoleh hubungan $5x + 3y \geq 30$.

✓ Ada paling sedikit 24 gram kebutuhan zat B,

Dari produk satu kemasan botol sebanyak 2 gram. Sehingga pembelian x buah produk kemasan botol diperoleh zat B sebanyak $2x$ gram.

Dari produk satu kemasan kantong palstik sebanyak 4 gram. Sehingga pembelian y buah produk kemasan kantong plastik diperoleh zat B sebanyak $4y$ gram.

Diperoleh hubungan $2x + 4y \geq 30$.

✓ Satu produk makanan suplemen kemasan botol mempunyai harga Rp 50.000. Jika dibeli x buah dengan $x \geq 0$, maka pengeluaran dari membeli produk kemasan botol adalah Rp 50.000 x. Sedangkan satu produk makanan suplemen kemasan kantong plastik mempunyai harga Rp 75.000. Jika dibeli y buah dengan $y \geq 0$, maka pengeluaran dari membeli produk kemasan kantong plastik adalah Rp 40.000 y. Sehingga minimal total pengeluaran adalah

Min 50.000 x + 40.000 y

Jadi tersusun model matematika sebagai berikut.

Min 50.000 x + 40.000 y

Dengan kendala:

$$5x + 3y \geq 30,$$
$$2x + 4y \geq 24,$$
$$x \geq 0,$$
$$y \geq 0.$$

Setelah kita membentuk model matematika dari suatu permasalahan, kebutuhan selanjutnya adalah menyelesaikan model matematika tersebut. Penyelesaian model matematika merepresentasikan penyelesaian dari permasalahan yang dimodelkan. Oleh karena itu, selanjutnya kita akan membahas bagaimana menentukan nilai maksimal atau minimal. Dengan kata lain bagaimana menentukan nilai optimum.

• RANGKUMAN

- Bentuk umum dari model matematika program linear dengan dua peubah adalah:

  Optimalkan $z = ax + by$

  dengan a, b adalah konstanta, dan dengan kendala suatu sistem pertidaksamaan linear dengan dua peubah.

- Membentuk model matematika program linear dengan cara:
  1. Tentukan peubah x dan y yang berkaitan dengan permasalahan.
  2. Dari peubah yang ada, susunlah keterkaitan dari peubah menjadi sebuah fungsi onbjektif dan sistem pertidaksamaan.

SOAL LATIHAN 3-2

Soal nomor 1 sampai dengan 10, tentukan model matematikanya.

1. Dua orang sekretaris dan bendahara perusahaan pergi ke pertokoan. Sekretaris membeli 3 pulpen dan 2 pensil seharga Rp 40.000. Si bendahara membeli 1 pulpen dan 5 pensil dengan membayar Rp 30.000.

2. Untuk membuat kue A diperlukan 1 kg mentega dan 2 kg terigu. Sedangkan untuk membuat kue B diperlukan 2 kg mentega dan 5 kg terigu. Mentega yang tersedia 4 kg dan terigu 8 kg.

3. Pada suatu pabrik, untuk memproduksi tepung terigu kemasan 1 kg diperlukan proses di mesin A selama 2 jam dan mesin B selama 1 jam. Untuk memproduksi tepung maisena kemasan 1 kg diperlukan proses di mesin A selama 2 jam dan mesin B selama 3 jam. Dalam setiap harinya mesin A bekerja paling lama 20 jam dan mesin B paling lama 20 jam. Jika perusahaan tersebut setiap harinya memproduksi x tepung terigu kemasan 1 kg dan y tepung maisena kemasan 1 kg, maka tentukan banyaknya produksi masing-masing produkagar diperoleh pendapatan maksimal.

4. Pedagang sepatu mempunyai toko yang hanya memuat 500 pasang. Sepatu yang dijual adalah sepatu untuk pria dan wanita. Sepatu pris tidak bisa lebih dari 300 pasang. Harga pembelian sepatu pria adalah Rp 100.000, sedangkan sepatu wanita Rp 50.000. Modal yang dimiliki adalah Rp 8.000.000. Jika ia menjual sepatu pria seharga Rp 125.000 dan sepatu wanita Rp 100.000, maka berapakah keuntungan maksimal yang dia peroleh apabila semua sepatu terjual.

5. Sebuah Pesawat mempunyai 48 tempat duduk. Penumpang kelas A dengan bagasi tidak lebih dari 20 kg membayar Rp 600.000, sedang kelas B dengan bagasi tidak lebih dari 50 kg membayar Rp 750.000. Jika kapasitas bagasi adalah 1.500 kg, tentukan banyaknya penumpang masing-masing kelas agar diperoleh pendapatan yang sebesar-besarnya.

6. Suatu pabrik membuat dua jenis produk A dan B. Buatlah sistem pertidaksamaannya jika setiap produk dikerjakan oleh mesin Press dan mesin Tumbuk. Produk A membutuhkan 2 jam/butir dikerjakan oleh mesin Press dan 2 jam/butir oleh mesin Tumbuk. Produk B membutuhkan 3 jam/butir dikerjakan oleh mesin Press dan 1 jam/butir dikerjakan oleh mesin Tumbuk. Sedangkan mesin Pres bekerja 18 jam/hari dan mesin tumbuk hanya 10 jam/hari.

7. Seorang penjahit mempunyai 80 m^2 kain katun dan 120 m^2 kain wol. Untuk membuat satu jas pria memerlukan 1 m^2 katun dan 3 m^2 wol, sedangkan jas wanita memerlukan masing-masing 2 m2. Jika harga jual masing-masing jas adalah Rp 300.000 , tentukan model program linear untuk memaksimalkan uang hasil penjualan yang diperoleh ?

8. Seorang pedagang sepatu menjual dua jenis sepatu A dan B. Sepatu A dibeli dengan harga Rp 250.000 dan mendapatkan keuntungan sebesar Rp 50.000 . Sepatu B dibeli dengan harga Rp 300.000 dan mendapatkan keuntungan sebesar Rp 100 ribu. Jika pedagang ini mempunyai uang Rp 10 juta dan jumlah sepatu yang dapat dibawa 30 pasang, tentukan model program linear dari permasalahan ini agar pedagang memperoleh keuntungan sebesar mungkin.

9. Suatu perusahaan production house sedang membuat rencana kegiatan untuk tahun 2009. Ada dua jenis film untuk tayangan TV yang akan dibuat yakni telenovela dan komedi. Biaya pembuatan satu episode telenovela adalah sebesar Rp 750.000.000 sedangkan biaya pembuatan satu episode komedi adalah sebesar Rp 400.000.000 .

   Satu episode telenovela dapat dijual dengan harga Rp 1.000.000.000 sedangkan satu episode komedi dapat dijual dengan harga Rp 800.000.000 Waktu pembuatan satu episode telenovela membutuhkan waktu 12 minggu sedangkan waktu pembuatan satu episode film komedi membutuhkan waktu 9 minggu. Waktu ekivalen jam kerja perusahaan dalam tahun 2009 adalah 600 minggu, bila dana yang tersedia adalah sebesar Rp 25.000.000.000, tentukan model program linear dari permasalahan ini agar keuntungan yang akan diperoleh maksimal.

10. Suatu usaha rumah tangga yang memproduksi alat mainan hoopla hop menyajikan 2 model dimana data produksi diberikan dalam bentuk tabel berikut :

Bahan	Model		Kapasitas maksimal
	A	B	
Rotan	1,5	1,6	300 m
Tali Rotan	1,2	1,5	1800 m
Amplas	10	12	500 lembar
Pelitur	0	2	200 kaleng
Jam kerja	0,5	0,4	300 jam

   Model B harus dibuat paling tidak 50 mainan, model A paling tidak 20 mainan.

Keuntungan untuk model A adalah Rp 2000 dan model B Rp 1500 , tentukan model program linear dari permasalahan ini untuk memaksimalkan keuntungan.

3.3 NILAI OPTIMUM DARI DAERAH PENYELESAIAN SISTEM PERTIDAKSAMAAN LINEAR.

Pada subbab ini, kita akan belajar tentang menentukan nilai optimum dari suatu fungsi objektif

$$\text{Optimalkan } z = ax + by$$

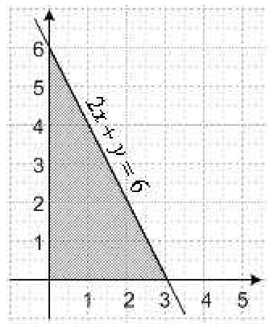
dengan *a, b* adalah konstanta, dan dengan kendala suatu sistem pertidaksamaan linear.

Dari pembahasan sebelumnya, penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear berupa suatu daerah *konveks* pada bidang kartesian. **Daerah konveks** adalah suatu daerah / himpunan titik – titik dimana setiap garis yang menghubungkan dua titik yang ada, selalu berada pada daerah tersebut.

Nilai optimum suatu fungsi objektif pada daerah himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear adalah suatu titik pada daerah penyelesaian yang menyebabkan fungsi objektif tersebut bernilai optimum. Nilai optimum dapat berupa nilai maksimum atau nilai minimum. Titik optimum bisa lebih dari satu.

Untuk mendapatkan titik optimum, akan terlebih dahulu dilakukan dengan ilustrasi berikut ini.
Pandang suatu daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan

$2x + y \leq 6$, $x \geq 0$, dan $y \geq 0$, seperti yang diperlihatkan pada Gambar 4.3.1. Daerah penyelesaiannya adalah yang diarsir, katakan daerah *D.*



Gambar 4.3.6

Pada ilustrasi ini kita akan mencari nilai optimum dari fungsi objektif $z = 3x + 2y$ pada daerah *D*. Pencarian nilai optimum diperoleh dengan cara mensubstitusikan semua titik yang ada di *D* ke fungsi *z*. Namun ini tidak mungkin, karena banyaknya titik di daerah *D* adalah tak berhingga banyak.

Karena daerah D adalah berbentuk konveks, salah satu titik pojok dari D merupakan nilai optimum z pada D. Ingat bahwa nilai optimum bisa lebih dari satu. Oleh karena itu, bisa jadi ada titik lain di *D* yang juga merupakan nilai optimum.

Nilai $z = 3x + 2y$ dari beberapa titik di *D* disajikan dalam Tabel 4.3.1.

Dari tabel tersebut terlihat bahwa:

- ✓ Nilai maksimum sebesar 12 terjadi pada titik (0, 6).
- ✓ Nilai minimumnya sebesar 0 terjadi pada titik (0, 0). Titik (0,0), (3, 0) dan (0, 6) merupakan titik-titik pojok dari daerah penyelesaian.

Tabel 4.3.1. Nilai z pada titik-titik dalam daerah penyelesaian

Titik	**Nilai z = 3x + 2y**
(0,0)	z = 3.0 + 2.0 = 0
(1,1)	z = 3.1 + 2.1 = 5
(2,1)	z = 3.2 + 2.1 = 8
(3,0)	z = 3.3 + 2.0 = 9
(1,2)	z = 3.1 + 2.2 = 7
(2,2)	z = 3.2 + 2.2 = 10
(1,3)	z = 3.1 + 2.3 = 9
(1,4)	Z = 3.1 + 2.4 = 11
(0,6)	**Z = 3.0 + 2.6 = 12**

Berdasarkan hal tersebut, titik optimum dari daerah himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear merupakan titik pojok daerah penyelesaian.

Dari ilustrasi di atas, untuk mencari nilai optimum fungsi objektif *z* pada suatu daerah penyelesaian *D* dapat dilakukan sebagai berikut.

i. Gambarkan daerah *D* yang merupakan daerah penyelesaian dari kendala yang berupa sistem pertidaksamaan linear.

ii. Tentukan semua titik pojok dari daerah *D.*

iii. Substitusikan semua nilai di titik pojok ke fungsi objektif *z,* bandingkan dan pilih mana yang nilainya optimum.

Jika diperlukan penyelesaian dalam bentuk bulat, maka ambillah titik di daerah *D* dengan nilai *x* dan *y* bulat yang terdekat dengan titik pojok nilai optimumnya.

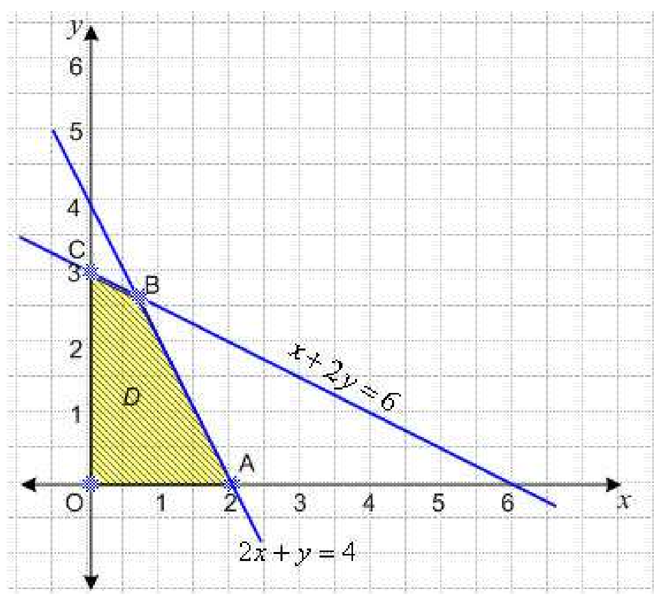
CONTOH 3.3.1

Tentukan daerah himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + 2y \leq 6$ dan $y + 2x \leq 4$, $x, y \in R$. Tentukan pula nilai maksimum dan minimum dari $z = 3x + 5y$ pada sistem pertidaksamaan tersebut.

Penyelesaian:

i. Gambarkan daerah *D* yang merupakan daerah penyelesaian dari kendala suatu sistem pertidaksamaan linear.

Cara menggambar daerah penyelesaian dari pertidaksamaan linear sama seperti sebelumnya. Gambar dari garis $x + 2y = 6$ dan garis $y + 2x = 4$ seperti yang terlihat pada Gambar 4.3.2.



Gambar 4.3.2

ii. Tentukan semua titik pojok dari daerah *D.*

Tampak pada Gambar 4.3.2, bahwa titik pojok dari daerah penyelesaian *D* adalah titik O, A, B dan C.

Posisi titik-titik tersebut dicari dengan cara :

- ✓ Titik O(0,0) karena merupakan perpotongan antara garis $x = 0$ (sumbu *y*) dan garis $y = 0$ (sumbu *x*).
- ✓ Titik A adalah perpotongan antara garis $y = 0$ dan garis $y + 2x = 4$.

  Sehingga didapat: $0 + 2x = 4$ atau $2x = 4$ atau $x = 2$.

  Posisi titik A adalah (2, 0).
- ✓ Titik B adalah perpotongan antara garis $x + 2y = 6$ garis $y + 2x = 4$.

  Posisi titik B dicari dengan cara :

  $$2(x + 2y = 6) \rightarrow 2x + 4y = 12$$

  $$2x + y = 4 \quad \cancel{\rightarrow 2x + y = 4} \quad -$$

  $$3y = 8 \quad \rightarrow y = 8/3$$

  Dari $2x + y = 4$, jika $y = 8/3$ maka $2x = 4/3$ dan diperoleh

  $x = 4/6$.

  Jadi posisi titik B adalah (4/6, 8/3).
- ✓ Titik C adalah perpotongan antara garis $x = 0$ dan garis $x + 2y = 6$.

  Berarti posisi titik C adalah (0, 3).

iii. Substitusikan semua nilai di titik pojok ke fungsi objektif *z*, bandingkan dan pilih mana yang nilainya optimum.

Masukkan posisi titik pojok pada fungsi $z = 3x + 5y$ yang memberikan :

- ✓ Titik O(0, 0), memberikan nialai $z = 0$
- ✓ Titik A(2, 0), memberikan nialai $z = 6$
- ✓ Titik B(4/6, 8/3), memberikan niali $z = 15\frac{1}{3}$
- ✓ Titik C(0, 3), memberikan nilai $z = 15$

Jadi nilai maksimum fungsi $z = 3x + 5y = 15\frac{1}{3}$,

dan nilai minimum fungsi $z = 3x + 5y = 0$.

CONTOH 3.3.2

Tentukan daerah himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan

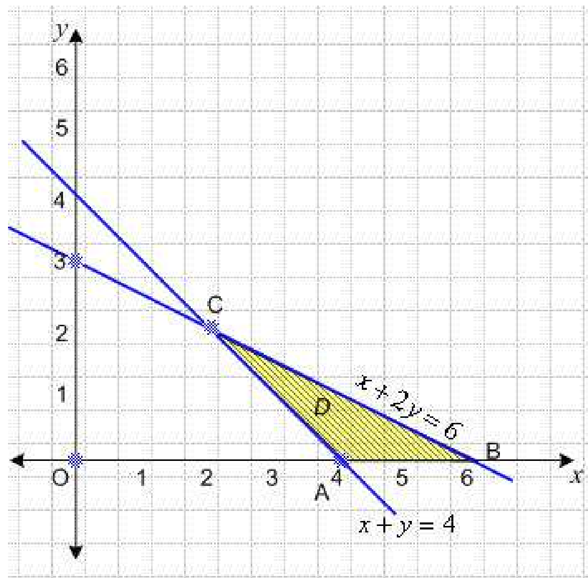
$x \geq 0, y \geq 0, x + 2y \leq 6$ dan $y + x \geq 4$ dengan $x, y \in R$.

Tentukan pula nilai maksimum dan minimum dari $z = 3x + 5y$ dengan kendala sistem pertidaksamaan linear tersebut.

Penyelesaian :

i. Gambarkan daerah *D* yang merupakan daerah penyelesaian dari kendala suatu sistem pertidaksamaan linear.

Cara menggambar daerah penyelesaian dari pertidaksamaan linear sama seperti sebelumnya. Gambar dari garis $x + 2y = 6$ dan $y + x = 4$ seperti yang terlihat pada Gambar 4.3.3.



Gambar 4.3.3

ii. Tentukan semua titik pojok dari daerah *D.*

Tampak pada Gambar 4.3.3, bahwa titik pojok dari daerah penyelesaian *D* adalah titik O, A, B dan C.

Posisi titik-titik tersebut dicari dengan cara :

- ✓ Titik O(0,0) karena merupakan perpotongan antara garis $x = 0$ (sumbu *y*) dan garis $y = 0$ (sumbu *x*).
- ✓ Titik A adalah perpotongan antara garis $y = 0$ dan garis $y + x = 4$.

  Sehingga didapat: $0 + x = 4$ atau $x = 4$.

  Posisi titik A adalah (4, 0).

- ✓ Titik B adalah perpotongan antara garis $x + 2y = 6$ garis $y + x = 4$.

  Posisi titik B dicari dengan cara :

  $$x + 2y = 6 \quad \rightarrow \quad x + 2y = 6$$

  $$x + y = 4 \quad \rightarrow \quad \cancel{x + y = 4} \; -$$

  $$y = 2 \quad \rightarrow y = 2$$

  Dari $x + y = 4$, jika $y = 2$ maka $x = 2$

  Jadi posisi titik B adalah (2, 2).

- ✓ Titik C adalah perpotongan antara garis $x = 0$ dan garis $x + y = 4$

  Berarti posisi titik C adalah (0, 4).

iii. Substitusikan semua nilai di titik pojok ke fungsi objektif *z,* bandingkan dan pilih mana yang nilainya optimum.

Masukkan posisi titik pojok pada fungsi $z = 3x + 5y$ yang memberikan :

- ✓ Titik A(4, 0), memberikan nialai $z = 12$
- ✓ Titik B(6, 0), memberikan niali $z = 18$
- ✓ Titik C(2, 2), memberikan nilai $z = 16$

Jadi nilai maksimum fungsi $z = 3x + 5y = 18$,

dan nilai minimum fungsi $z = 3x + 5y = 12$.

CONTOH 3.3.3

Selesaikan program linear berikut ini.

Maksimum dari $z = 3x + 5y$

Dengan kendala:

$x + 2y \leq 6.$

$y + 2x \leq 4,$

$x \geq 0,$

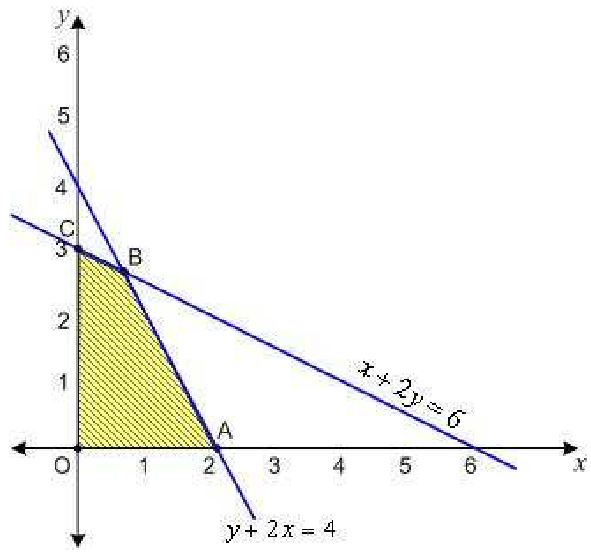
$y \geq 0.$

$x, y \in R.$

Penyelesaian:

i. Gambarkan daerah *D* yang merupakan daerah penyelesaian dari kendala suatu sistem pertidaksamaan linear.

Cara menggambar daerah penyelesaian dari pertidaksamaan linear sama seperti sebelumnya. Gambar dari garis $x + 2y = 6$ dan $y + 2x = 4$, seperti yang terlihat pada Gambar 4.3.4.



Gambar 4.3.4

ii. Tentukan semua titik pojok dari daerah *D.*

Tampak pada Gambar 4.3.4, bahwa titik pojok dari daerah penyelesaian *D* adalah titik O, A, B dan C.

Posisi titik-titik tersebut dicari dengan cara :

- ✓ Titik O(0,0) karena merupakan perpotongan antara garis $x = 0$ (sumbu *y*) dan garis $y = 0$ (sumbu *x*).
- ✓ Titik A adalah perpotongan antara garis $y = 0$ dan garis $y + 2x = 4$.

  Sehingga didapat: $0 + 2x = 4$ atau $x = 2$.

  Posisi titik A adalah (2, 0).
- ✓ Titik B adalah perpotongan antara garis $x + 2y = 6$ garis $y + 2x = 4$.

  Posisi titik B dicari dengan cara :

$$x + 2y = 6 \quad \rightarrow \quad 2x + 4y = 12$$

$$2x + y = 4 \quad \rightarrow \quad \cancel{2x + \; y = \; 4} \; -$$

$$3y = 8 \quad \rightarrow y = 8/3$$

Dari $x + y = 4$, jika $y = 8/3$ maka $x = 4/3$

Jadi posisi titik B adalah (4/3, 8/3).

✓ Titik C adalah perpotongan antara garis $x = 0$ dan garis $2x + y = 4$

Berarti posisi titik C adalah (0, 4).

iii. Substitusikan semua nilai di titik pojok ke fungsi objektif *z,* bandingkan dan pilih mana yang nilainya optimum.

Masukkan posisi titik pojok pada fungsi $z = 3x + 5y$ yang memberikan :

- ✓ Titik O(0,0), memberikan nilai $z = 0$
- ✓ Titik A(2, 0), memberikan nilai $z = 6$
- ✓ Titik B(2/3, 8/3), memberikan nilai $z = 15\frac{1}{3}$
- ✓ Titik C(0, 3), memberikan nilai $z = 15$

Jadi nilai maksimum fungsi $z = 3x + 5y = 15\frac{1}{3}$.

CONTOH 3.3.4

Seorang petani ikan memberikan dua jenis produk makanan suplemen untuk kolam ikannya. Produk makanan suplemen kemasan satu botol mengandung 5 gram zat A dan 2 gram zat B. Sedangkan produk makanan suplemen kemasan satu kontong plastik mengandung 3 gram zat dan 4 gram zat B. Pada setiap musim tebar ikan, petani tersebut membutuhkan paling sedikit 30 gram zat A dan 24 gram zat B untuk kesuksesan ikannya. Jika harga makanan suplemen satu kemasan botol adalah Rp 50.000 dan untuk kemasan kantong plastik adalah Rp 40.000, maka tentukan banyaknya makanan suplemen kemasan botol dan kemasan kantong plastik yang harus dibeli agar biaya pemeliharaan ikannya minimal.

Penyelesaian:

Pada contoh permasalahan ini telah dirumuskan dalam bentuk model matematika sebagai berikut.

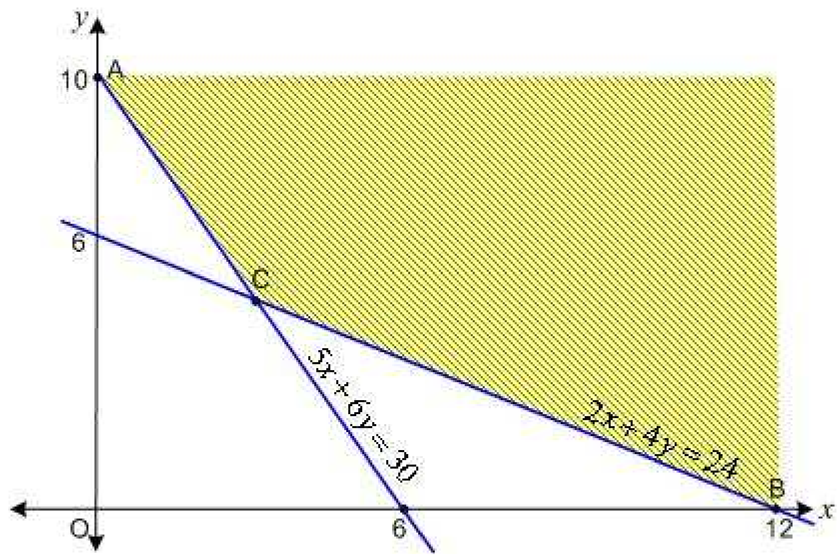
Minimumkan $50.000\,x + 40.000\,y$

Dengan kendala:

$$5x + 3y \geq 30,$$
$$2x + 4y \geq 24,$$
$$x \geq 0,$$
$$y \geq 0.$$

i. Gambarkan daerah *D* yang merupakan daerah penyelesaian dari kendala suatu sistem pertidaksamaan linear.

Cara menggambar daerah penyelesaian dari pertidaksamaan linear sama seperti sebelumnya. Gambar dari garis $5x + 3y = 30$ dan $2x + 4y = 24$, seperti yang terlihat pada Gambar 4.3.5.



Gambar 4.3.5

ii. Tentukan semua titik pojok dari daerah *D.*

Tampak pada Gambar 4.3.5, bahwa titik pojok dari daerah penyelesaian *D* adalah titik A, B dan C.

Posisi titik-titik tersebut dicari dengan cara :

- ✓ Titik A adalah perpotongan antara garis $x = 0$ dan garis $5x + 3y = 30$.

  Sehingga didapat: $0 + y = 10$ atau $y = 10$.

  Posisi titik A adalah (0, 10).

- ✓ Titik B adalah perpotongan antara garis $y = 0$ dan garis $2x + 4y = 24$.

  Sehingga didapat: $2x + 0 = 24$ atau $x = 12$.

  Berarti posisi titik B adalah (6, 0).

- ✓ Titik C adalah perpotongan antara garis $5x + 3y = 30$ garis $2x + 4y = 24$.

  Posisi titik B dicari dengan cara :

$$5x + 3y = 30 \quad \rightarrow \; 10x + 6y \; = \; 60$$

$$2x + 4y = 24 \quad \rightarrow \cancel{10x + 20y = 120} \quad -$$

$$14y = \; 60 \quad \rightarrow y = 30/7$$

Dari $2x \; + \; 4y \; = 24$, jika $y \; = \; 30/7$ maka $x \; = 24/7$

Jadi posisi titik C adalah (24/7, 30/7).

iii. Substitusikan semua nilai di titik pojok ke fungsi objektif *z,* bandingkan dan pilih mana yang nilainya optimum.

Masukkan posisi titik pojok pada fungsi

$z = 50.000\, x \; + \; 40.000\, y$ yang memberikan :

- ✓ Titik A(0, 10), memberikan nilai z = 400.000
- ✓ Titik B(12, 0), memberikan nilai $z \; = 600.000$
- ✓ Titik C(24/7, 30/7), memberikan nilai z = 2.400.000/7

Jadi nilai minimum fungsi $z = \; 50.000x + 40.000y = \; 2.400.000/7$ terjadi di titik C(24/7,30/7).

SOAL LATIHAN 3-3

Soal 1-8, carilah nilai optimum dari masalah program linear berikut ini.

a. Maksimumkan $24x + 8y$
   dengan syarat $2x + 5y \le 40$; $4x + 5y \le 20$; $10x + 5y \le 60$ dan
   $x \ge 0,\ y \ge 0$
b. Maksimumkan $x + 2y$
   dengan syarat $x + 6y \le 36$; $3x + 2y \le 24$ dan $x \ge 0,\ y \ge 0$

c. Minimumkan $3x + 4y$
   dengan syarat $2x + 3y \ge 36$; $2x + 2y \ge 28$; $3x + 2y \ge 24$ dan
   $x \ge 0,\ y \ge 0$
d. Minimumkan $2x + y$
   dengan syarat $3x + y \ge 15$; $x + 5y \ge 20$ dan $8x + 2y \ge 32$

e. Maksimumkan $4x + 5y$
   dengan syarat $2x + 6y \le 36$; $5x + 3y \le 30$; $8x + 2y \le 40$
   dan $x \ge 0,\ y \ge 0$

f. PT Batako membuat dua jenis produk A25 dan F28. Kedua produk memberikan sumbangan keuntungan per unit masing-masing Rp 600 dan Rp 850 yang masing-masing dikerjakan pada mesin 1 dan mesin 2. Model A25 membutuhkan waktu penyelesaian 9 jam di mesin 1, sedangkan F28 3 jam pada mesin 2 model A25 selama 4 jam, sedangkan F28 selama 6 jam. Bagian maintenance dalam seminggu hanya mampu menyediakan waktu operasi 27 jam untuk mesin 1 dan 23 jam untuk mesin 2. Berapa unit setiap produk yang harus diproduksi per minggu agar keuntungan maksimal?

Nyatakan permasalahan tersebut dalam model program linear dan carilah nilai optimumnya.

g. Seorang yang ingin cepat sehat bermaksud untuk minum sedikitnya 36 satuan vitamin A setiap hari, 28 satuan vitamin C dan 32 satuan vitamin D. Multivitamin jenis pertama berharga 3 satuan uang menyediakan 2 satuan vitamin A setiap hari, 2 satuan vitamin C dan 8 satuan vitamin D. Multivitamin jenis kedua berharga 4 satuan menyediakan 3 satuan vitamin A setiap hari, 2 satuan vitamin C dan 2 satuan vitamin D. Carilah jumlah vitamin yang harus diminum agar kebutuhkan akan vitamin dipenuhi.

h. Pada suatu pabrik, untuk memproduksi tepung terigu kemasan 1 kg diperlukan proses di mesin A selama 2 jam dan mesin B selama 1 jam. Untuk memproduksi tepung maisena kemasan 1 kg diperlukan proses di mesin A selama 2 jam dan mesin B selama 3 jam. Dalam setiap harinya mesin A bekerja paling lama 20 jam dan mesin B paling lama 20 jam. Jika perusahaan tersebut setiap harinya memproduksi x tepung terigu kemasan 1 kg dan y tepung maisena kemasan 1 kg, maka tentukan banyaknya produksi masing-masing produkagar diperoleh pendapatan maksimal.

3.4 PENYELESAIAN PROGRAM LINEAR DENGAN MENGGUNAKAN GARIS SELIDIK

Pada bagian sebelumnya telah dipelajari, cara mencari nilai optimum dengan menggunakan titik-titik pojok daerah himpunan penyelesaian. Pada bagian ini akan dipelajari metode lain untuk menentukan nilai optimum dari suatu masalah program linear. Metoda ini dikenal dengan istilah garis selidik.

Garis selidik adalah garis-garis yang sejajar dengan garis yang merupakan grafik fungsi objektif yang berfungsi untuk menyelidiki apakah nilai fungsi objektif dari titik pojok tersebut maksimum atau minimum.

Langkah-langkah yang harus dilakukan dalam penggunaan garis selidik antara lain.

1 Gambarlah garis $ax + by = a \times b$ yang memotong sumbu *x* di (b, 0) dan memotong sumbu *y* di (0, *a*) sebagai acuan.

2 Tarik garis sejajar $ax + by = a \times b$ mulai dari nilai *ab* minimum hingga nilai *ab* maksimal.

   a. Jika garis $ax + by = k$ yang merupakan garis yang sejajar $ax + by = a \times b$ dan berada paling bawah atau paling kiri pada daerah penyelesaian, maka *k* adalah nilai minimum.

   b. Jika garis $ax + by = k$ yang merupakan garis yang sejajar $ax + by = a \times b$ dan berada paling atas atau paling kanan pada daerah penyelesaian, maka *k* adalah nilai maksimum.

Agar lebih mudah dipahami, terutama dalam pembuatan garis selidik untuk menentukan nilai optimal permasalahan program linear dengan baik, perhatikan contoh berikut :

CONTOH 3.4.1

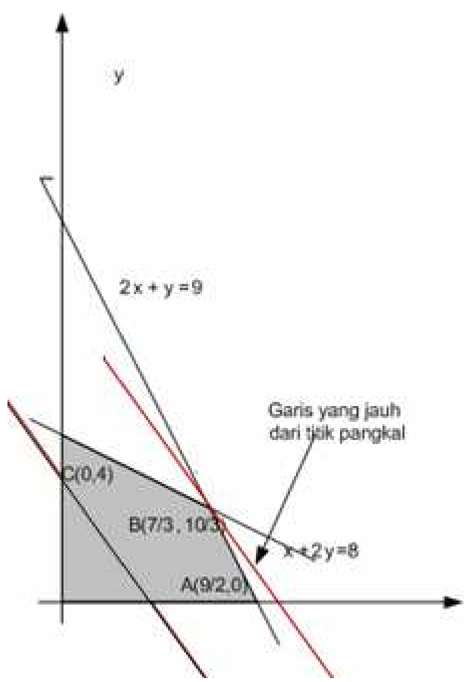
Tentukan nilai maksimum dari $3x + 2y$ pada sistem pertidaksamaan $x + 2y \leq 8$, $2x + y \leq 9$ dengan $x \geq 0$, $y \geq 0$ dan $x, y \in R$

Penyelesaian:

Himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan

$$x + 2y \leq 8,$$
$$2x + y \leq 9,$$
$$x \geq 0,$$
$$y \geq 0.$$

digambarkan pada Gambar 4.4.1 berupa daerah berarsir pada gambar di bawah.



Gambar 4.4.1

Digambar garis selidik $3x + 2y = k$, untuk $k = 6$: diperoleh garis

$3x + 2y = 6$.

Garis yang sejajar dengan garis $3x + 2y = 6$ dan letaknya paling jauh dari titik pangkal adalah garis yang melalui titik B(7/3,10/3).

Jadi titik B(7/3,10/3) adalah titik pada daerah himpunan penyelesaian yang menyebabkan nilai $3x + 2y$ maksimum. Nilai maksimumnya adalah

$3(7/3) + 2(10/3) = 13\frac{2}{3}$.

CONTOH 3.4.2

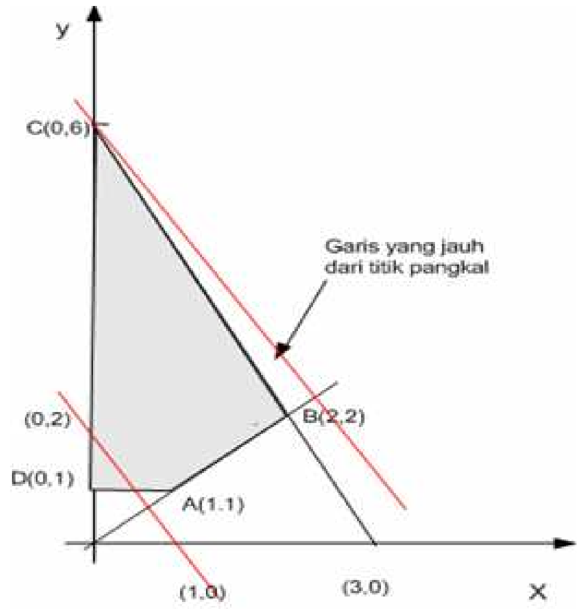
Pada Contoh 4.4.1 diatas kita akan menentukan nilai optimum (maksimum dan minimum) dari fungsi $2x + y$ dengan menggunakan garis selidik. Titik A, B, C dan D yang terletak dalam gambar merupakan titik-titik sudut yang terletak pada daerah himpunan penyelesaian dari suatu sistem peridaksamaan linear.

Penyelesaian:

Garis $2x + y = k$ digambar untuk $k = 2$ diperoleh garis $2x + y = 2$.

a. Garis yang sejajar dengan garis $2x + y = 2$ dan terletak paling jauh dari titik pangkal adalah garis yang melalui titik C(0,6), jadi titik C(0,6) adalah titik pada daerah himpunan penyelesaian yang menyebabkan fungsi $2x + y$ maksimum. Nilai maksimumnya adalah 6.

b. Garis yang sejajar dengan garis $2x + y = 2$ dan terletak paling dekat dengan titik pangkal adalah garis yang melalui titik D(0,1) yang menyebabkan nilai $2x+ y$ minimum dengan nilai = 1.



SOAL LATIHAN 3-4

Dengan bantuan garis selidik, carilah nilai optimum dari masalah program linear berikut ini :

1. Maksimumkan 24 x + 8y
   dengan syarat $2x + 5y \le 40$; $4x + 5y \le 20$; $10x + 5y \le 60$ dan $x \ge 0, y \ge 0$
2. Maksimumkan $x + 2y$
   dengan syarat $x + 6y \le 36$; $3x + 2y \le 24$ dan $x \ge 0, y \ge 0$
3. Minimumkan $3x + 4y$
   dengan syarat $2x + 3y \ge 36$; $2x + 2y \ge 28$; $3x + 2y \ge 24$ dan $x \ge 0, y \ge 0$
4. Minimumkan $2x + y$
   dengan syarat $3x + y \ge 15$; $x + 5y \ge 20$ dan $8x + 2y \ge 32$
5. Maksimumkan $4x + 5y$

dengan syarat $2x + 6y \le 36$; $5x + 3y \le 30$; $8x + 2y \le 40$
dan $x \ge 0, y \ge 0$

6. Seorang penjahit mempunyai 80 m2 kain katun dan 120 m2 kain wol. Untuk membuat satu jas pria memerlukan 1 m2 katun dan 3 m2 wol, sedangkan jas wanita memerlukan masing-masing 2 m2. Jika harga jual masing2 jas adalah Rp 300.000 , tentukan jumlah jas pria dan wanita yang harus dibuat agar uang hasil penjualan yang diperoleh maksimal.

7. Seorang pedagang sepatu menjual dua jenis sepatu A dan B. Sepatu A dibeli dengan harga Rp 250.000 dan mendapatkan keuntungan sebesar Rp 50.000 . Sepatu B dibeli dengan harga Rp 300.000 dan mendapatkan keuntungan sebesar Rp 100 ribu. Jika pedagang ini mempunyai uang Rp 10 juta dan jumlah sepatu yang dapat dibawa 30 pasang, tentukan jumlah tiap jenis sepatu yang harus dijual agar pedagang memperoleh keuntungan sebesar mungkin.

8. Suatu perusahaan production house sedang membuat rencana kegiatan untuk tahun 2009. Ada dua jenis film untuk tayangan TV yang akan dibuat yakni telenovela dan komedi. Biaya pembuatan satu episode telenovela adalah sebesar Rp 750.000.000 sedangkan biaya pembuatan satu episode komedi adalah sebesar Rp 400.000.000 .

   Satu episode telenovela dapat dijual dengan harga Rp 1.000.000.000 sedangkan satu episode komedi dapat dijual dengan harga Rp 800.000.000.

   Waktu pembuatan satu episode telenovela membutuhkan waktu 12 minggu sedangkan waktu pembuatan satu episode film komedi membutuhkan waktu 9 minggu. Waktu ekivalen jam kerja perusahaan dalam tahun 2009 adalah 600 minggu, bila dana yang tersedia adalah sebesar Rp 25.000.000.000 , tentukan jumlah tiap jenis film yang harus dibuat agar keuntungan yang akan diperoleh maksimal .

9. Suatu usaha rumah tangga yang memproduksi alat mainan hoopla hop menyajikan 2 model dimana data produksi diberikan dalam bentuk tabel berikut :

Bahan	Model		Kapasitas maksimal
	A	B	
Rotan	1,5	1,6	300 m
Tali Rotan	1,2	1,5	1800 m
Amplas	10	12	500 lembar
Pelitur	0	2	200 kaleng
Jam kerja	0,5	0,4	300 jam

Model B harus dibuat paling tidak 50 mainan, model A paling tidak 20 mainan. Keuntungan untuk model A adalah Rp 2000 dan model B Rp 1500 , tentukan jumlah tiap model hoopla hop yang akan dibuat agar keuntungan yang akan diperoleh maksimal.

10. PT Batako membuat dua jenis produk A25 dan F28. Kedua produk memberikan sumbangan keuntungan per unit masing-masing Rp 600 dan Rp 850 yang masing-masing dikerjakan pada mesin 1 dan mesin 2. Model A25 membutuhkan waktu penyelesaian 9 jam di mesin 1, sedangkan F28 3 jam pada mesin 2 model A25 selama 4 jam, sedangkan F28 selama 6 jam. Bagian maintenance dalam seminggu hanya mampu menyediakan waktu operasi 27 jam untuk

mesin 1 dan 23 jam untuk mesin 2. Berapa unit setiap produk yang harus diproduksi per minggu agar keuntungan maksimal?

Nyatakan permasalahan tersebut dalam model program linear dan carilah nilai optimumnya.

11. Seorang yang ingin cepat sehat bermaksud untuk minum sedikitnya 36 satuan vitamin A setiap hari, 28 satuan vitamin C dan 32 satuan vitamin D. Multivitamin jenis pertama berharga 3 satuan uang menyediakan 2 satuan vitamin A setiap hari, 2 satuan vitamin C dan 8 satuan vitamin D. Multivitamin jenis kedua berharga 4 satuan menyediakan 3 satuan vitamin A setiap hari, 2 satuan vitamin C dan 2 satuan vitamin D. Carilah jumlah vitamin yang harus diminum agar kebutuhkan akan vitamin dipenuhi.

Bab 5

LOGIKA MATEMATIKA

Dalam setiap kegiatan kita dituntut untuk mempunyai pola pikir yang tepat, akurat, rasional dan kritis agar tidak salah dalam penalaran yang menyebabkan kesalahan dalam mengambil kebijakan. Logika matematika dapat memberikan bimbingan agar dapat memiliki pola pikir seperti itu, sehingga dalam setiap aspek kehidupan manusia, logika sangat dibutuhkan agar lebih efektif dalam mengenal kehidupan dan menghindari kesalahan penalaran berfikir.

Blaise Pascal
1623-1662

Kalian semua tentunya tidak asing lagi dengan benda yang disebut kalkulator dan komputer karena sehari-hari kalian jumpai di sekolah, kantor bahkan di mall dan sebagainya. Tahukah anda bahwa yang menemukan mesin hitung (*calculator*) adalah ***Blaise Pascal*** pada tahun 1642, yang akhirnya berkembang menjadi komputer digital, pertama kali dirakit sekitar tahun 1944 hingga tahun 1973. Alat-alat ini bekerja berdasarkan instruksi bilangan biner. Instruksi ini pada dasarnya merupakan serangkaian kombinasi logis bilangan "0" atau "1" , yang dapat diartikan dalam bahasa logika sebagai kondisi "*True*" atau "*False*". Sehingga dalam pengoperasian komputer hanya dikenal dua kondisi yang analog dengan logika yaitu ada atau tidaknya aliran listrik.

Logika matematika meliputi: **logika pernyataan atau proposisi** (*propositional logic*) suatu yang menelaah manipulasi antar pernyataan dan **logika penghubung atau predikat** (*predicate logic*) yang menelaah manipulasi hubungan relasioanal antara pernyataan pertama dengan pernyataan kedua.

Oleh karena itu logika matematika adalah ilmu yang menelaah manipulasi antar pernyataan matematik (*mathematical Statement*). Namun sebelum melangkah lebih jauh, kita perlu memahami terlebih dahulu pengertian pernyataan dan pengertian penghubung.

Kode Biner dalam Program Komputer George Boole (1815-1864)

Ahli matematika Inggris pertama kali yang menggantikan nilai kebenaran :
" Benar " dengan "1" dan nilai kebenaran "Salah" dengan "0".
Sistem bilangan yang hanya terdiri atas dua macam bilangan tersebut dinamakan *Sistem Biner*. Temuan ini sangat berguna untuk menyusun program komputer. Dalam program komputer, proses pengubahan data ke dalam sistem bilangan biner disebut *Konversi Biner*. Dan notasi yang dihasilkan dari ini dinamakan *Kode Biner*

Sumber :Ensiklopedi Matematika & Peradaban Manusia 2002

4.1 PERNYATAAN DAN KALIMAT TERBUKA

Sebelumnya telah dikatakan bahawa logika matematika adalah ilmu yang menelaah manipulasi antar pernyataan matematik. Oleh karena itu akan kita definisikan suatu *pernyataan* dan apa yang dimaksud dengan *Kalimat terbuka*.

4.1.1 PROPOSISI

Pada subbab ini diawali dengan menampilkan beberapa contoh kalimat yang merupakan *proposisi* (pernyataan) dan yang bukan proposisi.

Contoh 5.1.1

Perhatikan contoh-contoh kalimat dibawah ini :

1. Jakarta adalah ibu kota Republik Indonesia.
2. 7 merupakan sebuah bilangan prima.
3. Manusia adalah salah satu jenis makluk di Bumi.
4. Banyaknya titik sudut dalam suatu kubus adalah 8 buah.
5. Jambi merupakan ibu kota propinsi Jawa Timur.
6. Himpunan penyelesaian $x^2 = 9$ adalah {-3,9}.
7. Taufik pandai main bulu tangkis atau tennes.
8. Jika 10 habis dibagi dengan 4, maka juga habis dibagi dengan 2.
9. Mudah-mudahan anda berhasil dalam meniti karier.
10. Berolahragalah secara teratur!

Kalimat deklaratif 1-6 merupakan kalimat yang *bernilai benar* saja atau *bernilai salah* saja, tidak sekaligus benar dan salah. Kalimat yang demikian ini merupkan kalimat yang mempunyai nilai kebenaran, disebut *pernyataan.* Kalimat 7-8 dua pernyataan yang dihubungkan dengan suatu kata *penghubung*. Sedangkan kalimat deklaratif 9-10 *tidak mempunyai nilai kebenaran.* Oleh karena itu Penjelasan kalimat-kalimat deklaratif diatas yang merupakan pernyataan atau bukan pernyataan adalah sebagai berikut:

- Kalimat deklaratif 1 – 6 dalam contoh 5.1.1 tidak memuat penghubung disebut ***pernyataan primitive*** **(***proposisi primitive*), dan biasanya dilambangkan dengan huruf kecil:***p, q*, *r*, *s*** *dan sebagainya*. Untuk pernyataan 1 – 3 merupakan *pernyataan yang bernilai benar,* sedangkan pernyataan 4 – 6 merupakan suatu *pernyataan yang bernilai salah***.**
- Kalimat deklaratif ketujuh dan kedelapan memuat penghubung ” *atau* ” , ”*dan* ” , “*jika...maka*... ” disebut **proposisi majemuk** (*pernyataan majemuk*).
- Kalimat kesembilan dan kesepuluh bukan pernyataan karena *tidak mempunyai nilai kebenaran.*

Berikut ini diberikan definisi suatu pernyataan :

DEFINISI 5.1.1 *Sebuah* ***pernyataan*** atau ***proposisi*** *adalah sebuah kalimat deklaratif yang mempunyai tepat satu nilai kebenaran, yaitu:* ***” Benar ” (B) saja*** *atau****” Salah ” (S) saja,*** *tetapi tidak sekaligus keduanya.*

Benar atau *salahnya* suatu pernyataan dapat ditentukan melalui *dasar empiris* yaitu berdasarkan fakta yang sesungguhnya atau dijumpai dalam kehidup alam ini dan dasar *non empiris* yaitu berdasarkan pembuktian atau perhitungan matematika.

4.1.2 KALIMAT TERBUKA

Suatu kalimat yang nilai kebenarannya belum dapat dibuktikan disebut *kalimat terbuka*. Ciri dari kalimat terbuka adalah adanya variabel (peubah)

Berikut ini diberikan beberapa contoh kalimat terbuka :

Contoh 5.1.2

1. $x + 9 > 0$.
2. Jarak kota B dengan kota Jakarta kurang dari 1000 km.
3. Jumlah titik sudut jajaran genjang adalah n.

- Pada kalimat pertama memuat variabel x . Jika x diubah dengan -11 menjadi suatu pernyataan yang *salah*, dan apabila x diganti dengan -5 menjadi suatu pernyataan yang *benar.* x = -11 dan x = -5 disebut *penyelesaian* kalimat terbuka tersebut.
- Pada kalimat kedua, variabelnya adalah B. Jika B diubah dengan Ambon menjadi suatu pernyataan yang *salah*, dan apabila B diganti dengan Bekasi menjadi suatu pernyataan yang *benar*.

- Pada kalimat ketiga, variabelnya adalah n. Jika n diganti dengan 4 menjadi suatu pernyataan yang *benar*, dan apabila n diganti dengan 7 menjadi suatu pernyataan yang *salah*.

SOAL LATIHAN 5-1

1) Diantara kalimat-kalimat berikut ini tentukan manakah yang merupakan pernyataan dan mana yang bukan pernyataan. Jika pernyataan tentukan nilai kebenarannya.
   a) Segi tiga adalah suatu bangun yang jumlah sisinya ada tiga buah.
   b) Semua bilangan prima habis dibagi 2.
   c) Jumlah sudut segi tiga adalah 360^{o}.
   d) Untuk setiap bilangan real x berlaku $x^2 \geq 0$
   e) π termasuk bilangan rasional.
   f) Pertandingan bola basketnya dimulai jam 16.00 WIB.
   g) Preti adalah gadis yang cantik.
   h) Pergilah ke rumah Santi !
   i) $\sqrt{2}$ merupakan bilangan real.
   j) Ada siswa SMK yang mengikuti OSN bidang matematika tingkat nasional.

2) Diantara kalimat-kalimat berikut ini tentukan manakah yang merupakan pernyataan dan manakah yang merupakan

kalimat terbuka. Jika pernyataan tentukan nilai kebenarannya.

a) $X + 5 > 0$.

b) $X^2 + 5 \geq 0$.

c) Satu windu sama dengan *n* tahun.

d) *t* hari waktu yang dibutuhkan bumi 1 kali berputar mengelilingi matahari.

e) Bilangan asli merupakan himpunan bagian bilangan bulat.

f) $2k + 1$ merupakan bilangan ganjil, untuk *k* bilangan cacah.

g) $2k$ merupakan bilangan genap, untuk *k* bilangan real.

h) Itu adalah benda cair.

i) Dua kali bilangan asli adalah bilangan genap

j) $\text{Sin}^2 x + \sin^2 y = 1$

3) Untuk soal no: 2 diatas yang merupakan kalimat terbuka, tentukanlah himpunan penyesaiannya agar menjadi suatu Pernyataan.

4) Diberikan kalimat terbuka berikut : $x^2 - 1 = 0$, *x* bilangan real. Tentukan Himpunan *x* agar kalimat itu menjadi suatu pernyataan.

5) Carilah himpunan penyelesaian setiap kalimat terbuka berikut jika *x* dan *y* variabel pada bilangan asli:

a) b)

c) d)

e) Bayangan (x, y) terhadap sumbu X berada di $(5,2)$

4.2 PENGHUBUNG ATAU KONEKTIF (*CONNECTIVE*)

Dalam logika matematika dikenal sebanyak 5 operator logika (penghubung), yaitu: **Negasi (*Negation*)**, **Konjungsi (*Conjunction*)**, **Disjungsi (*Disjunction*)**, **Implikasi (*Implication*)** , **Biimplikasi**, atau **Ekuivalensi (*Equivalence*).**

4.2.1 NEGASI

Negasi disebut juga *ingkaran* atau *pengingkaran* . Ingkaran dari suatu pernyataan diperoleh dengan menambahkan" *tidak benar*" di awal kalimat, atau dengan cara menyisipkan kata " *tidak*" atau " *bukan*" pada pernyataan tersebut.

DEFINISI 5.2.1 : *Misalkan **p** adalah pernyataan.*

Negasi dari p:

Untuk sembarang pernyataan p, ***negasi dari*** p dilambangkan dengan $\overline{p}$ dan dibaca " *bukan* p" Suatu pernyataan yang bernilai salah (*S*) jika p benar (*B*), dan bernilai benar (B) jika p

Berikut ini tabel kebenaran pernyataan negasi:

P	$\overline{p}$
B	S
S	B

Contoh 5.2.1

No	Pernyataan : *p*	Negasi (ingkaran) : $\overline{p}$
1	3 adalah faktor dari 24 (B)	***Tidak benar*** 3 adalah faktor dari 24 (S)
2	Jumlah sudut dalam suatu segi tiga selalu 180 $^{\circ}$ (B)	***Tidak benar*** Jumlah sudut dalam suatu segi tiga selalu 180 $^{\circ}$ (S)
3	Tiga puluh sembilan adalah bilangan prima (S)	Tiga puluh sembilan ***bukan*** bilangan prima (B)
4	Semua binatang adalah mahluk hidup (B)	***Tidak*** semua binatang adalah mahluk hidup (S)
5	$\text{Cos}^2 x + \sin^2 x = 2$ (S)	***Tidak benar*** $\text{Cos}^2 x + \sin^2 x = 2$ (B)
6	seminggu ada 7 hari (B)	***Tidak benar*** seminggu ada 7 hari (S)

4.2.2 KONJUNGSI

Pada bagian sebelumnya telah dipelajari suatu pernyataan tunggal. Namun selanjutnya akan dipelajari dua atau lebih pernyataan tunggal yang digabung dan disebut dengan pernyataan majemuk. Konjungsi merupakan kata penyambung antar beberapa pernyataan yang biasanya berupa kata "*dan*". Berkaitan dengan pernyataan majemuk tersebut, perhatikan contoh sederhana ini:

Pernyataan pertama : *Jakarta adalah ibukota Indonesia*
Pernyataan kedua : *Jakarta terbagi menjadi 6 wilayah*

Kedua pernyataan ini dapat digabung menjadi kalimat majemuk sebagai berikut :
Jakarta adalah ibukota Indonesia dan terbagi menjadi 6 wilayah
Kalimat ini merupakan kalimat majemuk dengan menggunakan kata penghubung " *dan*" Kalimat ini hanya benar jika kedua pernyataan sama-sama benar. Jika salah satu saja pernyataan itu yang salah (atau keduanya) maka pernyataan majemuk menjadi salah.

Sebagai contoh :
Pernyataan pertama : *Jakarta adalah ibukota Malaysia* (S)
Pernyataan kedua : *Jakarta terbagi menjadi 6 wilayah* (B)
Jakarta adalah ibukota Malaysia dan terbagi menjadi 6 wilayah (S)
kata penghubung "*dan*" pada perkataan majemuk dilambangkan dengan "$\wedge$" yang disebut *Konjungsi*. Konjungsi didefinisikan sebagai berikut :

DEFINISI 5.2.2 :
Konjungsi
Pernyataan majemuk p dan q disebut Konjungsi dari *p dan q dinyatakan dengan:*
" $p \wedge q$ "
adalah sebuah pernyataan bernilai benar jika pernyataan p dan q keduanya bernilai benar, dan bernilai salah jika salah satu p atau q (keduanya) salah

Tabel kebenaran konjungsi:

p	q	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Contoh 5.2.2

No	*P*	*q*	$p \wedge q$
1	Pulau Natuna berada di kepulauan Riau (B)	Natuna termasuk wilayah Indonesia (B)	B
2	Jumlah sudut dalam suatu segi tiga selalu 180^{o} (B)	Besar sudut segitiga sama sisi adalah 90^{o} (S)	S
3	Tiga puluh sembilan adalah bilangan irrasional (S)	Tiga puluh sembilan adalah bilangan prima (B)	S
4	$\text{Cos}^2 x + \sin^2 x = 2$ (S)	$\text{Cos}^2 x \geq 1 - \sin^2 x$ (S)	S

4.2.3 DISJUNGSI

Disjungsi merupakan kata penyambung berupa kata "*atau*" dalam menghubungkan dua pernyataan menjadi kata majemuk, perhatikan contoh sederhana ini:

p : Bumi adalah satu-satunya planet di jagat raya yang mempunyai kehidupan

(B)

q : Satu dekade sama dengan 10 tahun.

(B)

Kedua pernyataan ini dapat digabung menjadi kalimat majemuk sebagai berikut :

> *Bumi adalah satu-satunya planet di jagat raya yang mempunyai kehidupan atau satu dekade sama dengan 10 tahun.*

Kalimat ini merupakan kalimat majemuk dengan menggunakan kata penghubung " *atau*" Kalimat ini bernilai salah jika kedua pernyataan sama-sama salah. Jika salah satu saja pernyataan itu yang benar (atau keduanya) maka pernyataan majemuk menjadi benar.

Sebagai contoh :

Pernyataan pertama : *Jakarta adalah ibukota Malaysia* (S)

Pernyataan kedua : *Jakarta terbagi menjadi 6 wilayah* (B)

Dengan menggunakan kalimat penghubung :

"Jakarta adalah ibukota Malaysia atau Jakarta terbagi menjadi 6 wilayah (B)"

kata penghubung "*atau*" pada perkataan majemuk dilambangkan dengan "$\vee$" yang disebut *Disjungsi*. Disjungsi didefinisikan sebagai berikut :

DEFINISI 5.2.3

Disjungsi :

Pernyataan majemuk p dan q disebut Disjungsi dari *p dan q dinyatakan dengan:* " $p \vee q$ "

adalah sebuah pernyataan bernilai benar jika pernyataan p dan q salah satu atau keduanya bernila bebar, dan bernilai salah hanya jika keduanya bernilai salah

Berikut ini tabel kebenaran konjungsi :

p	q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Contoh 5.2.3

Tentukan nilai kebenaran pernyataan dalam tabel berikut ini dengan penghubung ”*atau*”.

No	p	q	$p \vee q$
1	Pulau Natuna berada di kepulauan Riau (B)	Natuna termasuk wilayah Indonesia (B)	B
2	Jumlah sudut dalam suatu segi tiga selalu 180 ^{o} (B)	Besar sudut segitiga sama sisi adalah 90^{o} (S)	B
3	Tiga puluh sembilan adalah bilangan (S)	Tiga puluh sembilan adalah bilangan prima (B)	B
4	$\text{Cos}^2 x + \sin^2 x = 2$ (S)	$\text{Cos}^2 x \geq 1 - \sin^2 x$ (S)	S

4.2.4 IMPLIKASI (PROPOSISI BERSYARAT)

Untuk memahami *implikasi*, perhatikan uraian berikut ini. Misalkan Boby berjanji pada Togar “Jika saya dapat medali olimpiade sains-matematika nasional tahun ini maka aku akan membelikan kamu sepatu bola”. Janji Boby ini hanya berlaku jika Boby mendapatkan medali olimpiade sains-matematika. Akibatnya jika Boby tidak mendapatkan medali dalam lomba olimpiade sains-matematika yang diikutinya tahun ini, tidak ada keharusan bagi Boby untuk membelikan sepatu bola buat Togar.

Misalkan Boby tidak mendapat medali maka Togar tidak kecewa karena Boby tidak memenuhi janjinya. Akan tetapi jika Boby dapat meraih medali dalam olimpiade matematika nasional yang diikutinya tetap membelikan sepatu bola buat Togar, tentu Togar akan senang. Jika Boby dapat medali namun tidak membelikan sepatu bola maka Togar akan kecewa dan menganggap tidak menepati janji. Kalimat yang diucapkan Boby pada Togar dalam bahasa logika matematika dapat ditulis sebagai berikut :

Jika p : dapat medali olimpiade sains-matematika nasional.

Maka q : membelikan sepatu bola

Sehingga dapat dinyatakan sebagai " Jika p maka q " atau dilambangkan dengan " $p \rightarrow q$" suatu pernyataan majemuk yang disebut dengan *Implikasi*.

Implikasi dari pernyataan p ke pernyataan q dinyatakan dengan , " $p \rightarrow q$ ", ialah sebuah pernyataan yang bernilai *salah* jika dan hanya *jika p bernilai benar* dan *q bernilai salah. Pernyataan p disebut* ***hipotesa (premis)*** *dan pernyataan q disebut* ***kesimpulan*** **(*****konklusi*****)**.

Selanjutnya Implikasi didefinisikan sebagai berikut :

DEFINISI 5.2.4

Implikasi:

Pernyataan majemuk p dan q disebut *implikasi (pernyataan bersyarat)* adalah sebuah pernyataan majemuk yang dilambangkan : " $p \rightarrow q$ " bernilai *salah* hanya jika hipotesa p bernilai *benar* dan konklusi q bernilai *salah.* Untuk kasus lainnya bernilai benar.

Berikut ini tabel kebenaran konjungsi

p	q	$p \rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

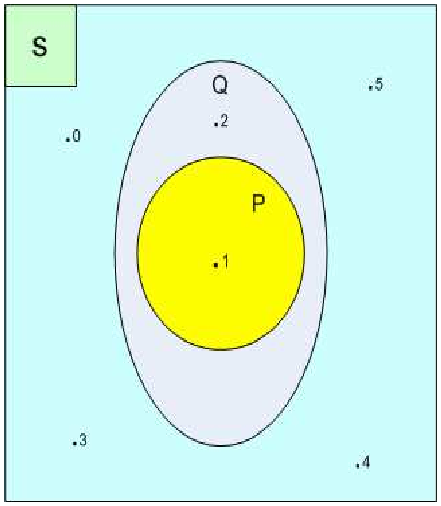
Contoh 5.2.4

Tentukan nilai kebenaran pernyataan dalam tabel berikut ini dengan penghubung ”*maka*”.

No	p	q	$p \rightarrow q$
1	Pulau Natuna berada di kepulauan Riau (B)	Natuna termasuk wilayah Indonesia (B)	B
2	Jumlah sudut dalam suatu segi tiga selalu 180^o (B)	Jumlah 2 buah sudut dalam segitiga adalah 120^o (S)	S
3	Tiga puluh sembilan adalah bilangan Prima (S)	Tiga puluh sembilan adalah habis dibagi tiga (B)	B
4	$\text{Cos}^2 x + \sin^2 x \geq 1$ (S)	$\text{Cos}^2 x \geq 1$ (S)	B

- **Hubungan antara implikasi dengan himpunan.**

Perhatikan diagram berikut ini :



S = { 0,1,2,3,4,5}

$p(x)$: $x - 1 = 0$

$q(x)$: $x^2 - 3x + 2 = 0$

ungkapan ini dapat ditulis :

P={x/x–1=0}, p benar jika $x \in$ P

Q={ x/ $x^2 - 3x + 2 = 0$ }, q benar jika $x \in$ Q

Tampak bahwa kalimat $p(x) \rightarrow q(x)$ kalimat implikasi yang benar.

Secara umum dapat disimpulkan bahwa :

Jika P *dan* Q *masing-masing himpunan penyelesaian dari kalimat terbuka* $p(x)$ dan $q(x)$ pada himpunan semesta S, maka $p(x) \rightarrow q(x)$ benar jika P $\subset$ Q.

Kalimat implikasi yang menyebabkan tiap penggantian nilai *x* benar untuk *p*(*x*) yang akan menyebabkan benar pula untuk *q*(*x*) dikatakan *implikasi yang logis.*

4.2.5 BIIMPLIKASI

Pernyataan *p* dan *q* apabila dirangkai dengan menggunakan hubungan "***Jika dan hanya jika*** " Sehingga menjadi suatu kalimat yang dapat dinyatakan sebagai ***"p Jika dan hanya jika q "*** atau dilambangkan dengan :

$$\text{“ } p \Leftrightarrow q \text{ ”}$$

suatu pernyataan majemuk disebut dengan ***biimplikasi*.**

Pernyataan majemuk biimplikasi menyiratkan suatu gabungan dari:

$$p \rightarrow q \quad \text{dan} \quad q \rightarrow p$$

Oleh karena itu nilai kebenaran biimplikasi $p \Leftrightarrow q$ dikatakan bernilai *benar* jika *p* dan *q* mempunyai nilai kebenaran yang sama seperti yang diungkapkan pada definisi berikut ini :

DEFINISI 5.2.5 : Biimplikasi

Pernyataan majemuk p dan q disebut *biimplikasi (pernyataan bersyarat dwi arah)* adalah sebuah pernyataan majemuk yang dilambangkan : " $p \Leftrightarrow q$ ".

Bernilai *benar* jika p dan q mempunyai nilai *kebenaran* yang sama.

Berikut ini tabel kebenaran biimplikasi:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Merujuk pada implikasi, bahwa *Jika* P *dan* Q masing-masing himpunan penyelesaian dari kalimat terbuka $p(x)$ dan $q(x)$ pada himpunan semesta S, maka:

$p(x) \rightarrow q(x)$ benar jika P $\subset$ Q

dan

$q(x) \rightarrow p(x)$ benar jika Q $\subset$ P

mengakibatkan pernyataan kalimat majemuk biimplikasi:

$$p(x) \Leftrightarrow q(x)$$

bernilai *benar* jika P = Q.

Kalimat biimplikasi yang menyebabkan tiap penggantian nilai *x* benar untuk *p*(*x*) yang akan menyebabkan benar pula untuk *q*(*x*) begitu pula untuk penggantian nilai *x* benar untuk *q*(*x*) yang akan menyebabkan benar pula untuk *p*(*x*) dikatakan *biimplikasi yang logis.* Dengan kata lain *p*(*x*) dan *q*(*x*) merupakan dua kalimat yang ***ekuivalen*** apabila kedua kalimat terbuka itu mempunyai himpunan penyelesaian yang sama.

Contoh 5.2.5

No	$p \Leftrightarrow q$	Nilai kebenaran
1	Segitiga ABC sama sisi $\Leftrightarrow$ besar setiap sudut segitiga adalah 60°	B
2	$x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$	S

3	n habis dibagi 7 ⇔ n adalah bilangan Prima	S
4	ABCD bangun persegi ⇔ ABCD segi empat yang sisinya sama	B
5	grafik $f(x)$ bukan garis lurus ⇔ $f(x)$ adalah fungsi yang tidak linear	B
6	$f(x)$ adalah fungsi linear ⇔ grafik $f(x)$ bukan garis lurus	S

Tentukan nilai kebenaran *Biimplikasi* pernyataan dalam tabel berikut ini:

Contoh 5.2.6

Misalkan *p, q* dan *r* adalah pernyataan, dimana:

p : Bumi adalah satu-satunya planet di jagat raya yang mempunyai kehidupan (B).

q : Satu dekade sama dengan 10 tahun. (B)

r : 1 + 1 = 3. (S)

Maka beberapa kombinasi dari pernyataan ini adalah:

1. Bumi bukan satu-satunya planet di jagat raya yang mempunyai kehidupan.

   Secara simbulik ditulis sebagai $\overline{p}$ dan bernilai salah(S).
2. Satu dekade sama dengan 10 tahun dan 1 + 1 = 3.

   Ditulis sebagai $q \wedge r$ yang bernilai salah(S).
3. Satu dekade sama dengan 10 tahun atau 1 + 1 = 3.

   Ditulis sebagai $q \vee r$ yang bernilai benar(B).
4. Jika satu dekade sama dengan 10 tahun maka 1 + 1 = 3.

   Ditulis sebagai $q \rightarrow r$ yang bernilai salah(S).

5. Satu dekade sama dengan 10 tahun jika dan hanya jika 1 + 1 = 3.

Ditulis sebagai $q \Leftrightarrow r$ yang bernilai salah(S).

Contoh 5.2.7

Nyatakan pernyataan berikut dengan simbul dan tentukan apakah benar atau salah. ”Blaise Pascal menemukan sejumlah mesin hitung dan tidak benar bahwa komputer digital elektronik pertama dirakit pada abad ke dua puluh atau π dihitung hingga 1.000.000 angka desimal pada tahun 1954”.

Jawaban:

Pertama, setiap pernyataan primitif kita beri simbul, misalkan:

p : Blaise Pascal menemukan sejumlah mesin hitung. (B)

q : Komputer digital elektronik pertama dirakit abad ke dua puluh(B)

r : π dihitung hingga 1.000.000 angka desimal pada tahun 1954. (S)

Maka pernyataan yang ditanyakan bisa ditulis secara simbulik sebagai

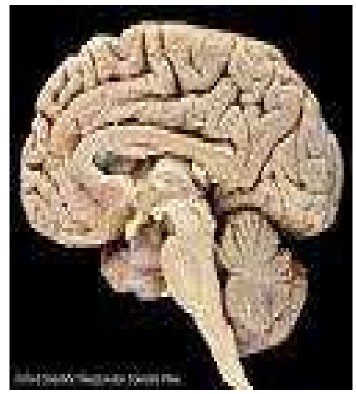
$$(p \wedge \bar{q}) \vee r$$

Untuk selanjutnya, karena Blaise Pascal menemukan mesin hitung (*calculator*) pada tahun 1642, komputer digital pertama kali dirakit sekitar tahun 1944 dan hingga tahun 1973 tidak pernah π dihitung sampai 1.000.000 angka desimal, maka pernyataan *p* dan *q* bernilai benar dan pernyataan *r* bernilai salah. Jika disubstitusikan ke dalam bentuk simbulik diatas, maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
(p \wedge \overline{q}) \vee r &\Leftrightarrow (B \wedge \overline{B}) \vee S \\
&\Leftrightarrow (B \wedge S) \vee S \\
&\Leftrightarrow S \vee S \\
&\Leftrightarrow S
\end{aligned}
$$

Jadi :

pernyataan tersebut diatas bernilai sala



Logika matematika dapat memberikan bimbingan agar dapat memiliki pola pikir yang tepat, akurat, rasional dan kritis.

4.2.6 TABEL KEBENARAN (*TRUTH TABLE*)

Untuk mengevaluasi apakah sebuah pernyataan majemuk benar atau salah kita perlu tabel kebenaran dari kalimat penghubung yang ada dalam pernyataan tersebut. Untuk sembarang pernyataan *p* dan *q*, rangkuman tabel kebenaran dari semua penghubung dapat dilihat pada Tabel 5.2.1.

Tabel 5.2.1. Tabel kebenaran penghubung

p	q	$\overline{p}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
B	B	S	B	B	B	B
B	S	S	S	B	S	S
S	B	B	S	B	B	S
S	S	B	S	S	B	B

Logika pernyataan tidak bisa menggambarkan sebagian besar pernyataan dalam matematika dan ilmu komputer. Sebagai ilustrasi, perhatikan pernyataan berikut

" **p : n adalah bilangan ganjil** "

Pernyataan *p* bukan sebuah pernyataan karena nilai kebenaran *p* bergantung pada nilai kebenaran n. Sebagai contoh, *p* benar jika n=3 dan salah jika n=8. Karena kebanyakan pernyataan dalam matematika dan ilmu komputer menggunakan peubah (variabel), maka kita harus mengembangkan sistem logika yang mencakup pernyataan yang memuat variabel seperti itu.

DEFINISI 5.2.6

Misalkan $P(x)$ merupakan sebuah pernyataan yang mengandung variabel x dan D adalah sebuah himpunan. Kita sebut P sebuah ***fungsi pernyataan (dalam D)*** *jika untuk setiap x di D, P(x) adalah pernyataan. Kita sebut D* ***daerah asal pembicaraan*** (domain of discourse) *dari P.*

Contoh 5.2.8

Berikut ini beberapa contoh fungsi pernyataan dan himpunan daerah asal :

1. $n^2 + 2n$ adalah bilangan ganjil, dengan daerah asal *himpunan bilangan bulat.*

2. $x^2 - x - 6 = 0$, dengan daerah asal *himpunan bilangan real.*
3. Seorang pemain bisbol memukul bola melampaui 300 ft pada tahun 1974, dengan daerah asal *himpunan pemain bisbol.*

Sebuah ***penghubung (predikat)*** seringkali menyatakan sebuah hubungan relasional antara: konstanta, variable dan fungsi.

Simbul-simbul yang digunakan dalam logika penghubung:

- Simbul **konstanta** : a, b, c, d.
- Simbul **variabel** : *x, y, z, w.*
- Simbul **fungsi** : *f, g, h.*
- Simbul **penghubung** : *P, Q, R, S.*

Contoh 5.2.9

Beberapa contoh penghubung:

1. $2x+3 \geq 5$, dengan x bilangan bulat positif dapat ditulis sebagai untuk setiap x (bulat positip), $P(x) : f(x) \geq 5$
2. $x + y \leq x - y$, dengan x dan y bilangan real dapat ditulis sebagai untuk setiap x,y (real), $Q(x; y) : f(x; y) \leq g(x; y)$
3. jika $x > 0$ maka $4x + 1 \geq 1$, dengan x bilangan bulat dapat ditulis sebagai beberapa x (bulat), jika $R(x) : x > 0$, maka $S(x) : h(x) \geq 1$

Contoh pertama, penghubung $P(x)$ menyatakan hubungan relasional antara fungsi $f(x)$ dan konstanta 5. Pada contoh kedua penghubung $Q(x; y)$ menyatakan hubungan relasional antara fungsi $f(x; y)$ dengan fungsi $g(x; y)$. Contoh ketiga memuat penghubung bersyarat ” jika ... maka ... ” dengan premis/hipotesa penghubung *R*(x) dan konklusi/kesimpulan penghubung *S*(x).

SOAL LATIHAN 5-2

1. Tentukan ingkaran atau negasi dari setiap kalimat berikut:
   a) Dua ratus tujuh belas adalah bilangan prima.
   b) Diagonal ruang pada suatu kubuas ada 4 buah
   c) Untuk semua sudut *x*, berlaku $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
   d) Pulau Matak termasuk wilayah propinsi Kepulauan Riau.
   e) 49 adalah bilangan kuadrat.

2. Lengkapi tabel kebenaran berikut ini:

p	q	$\overline{p}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \Leftrightarrow q$
B	B					
B	S					
S	B					
S	S					

3. Diberikan pernyataan-pernyataan sebagai berikut:
   p : Dua garis yang sejajar mempunyai titik potong
   q : Parabola selalu memotong sumbu *x.*
   r : nilai sinus suatu sudut maksimal 1.

Tentukan nilai kebenaran dari pernyataannya-pernyataan b

a) $(p \wedge \overline{q})$

b) $(p \vee r) \to \overline{p}$

c) $(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q} \Rightarrow r$

d) $\overline{(p \to q)} \Rightarrow \overline{q}$

e) $(p \wedge q) \vee r$

f) $(p \wedge q) \to (r \to \overline{q})$

4. Diketahui kalimat terbuka $p(x) = x^2 - 6x + 15 < 10$. Peubah x berada dalam semesta pembicaraan S = { 0,1,2,3,4,5,6}. Pernyataan p terbentuk dari $p(x)$ dengan cara mengganti $x \in S$.
   a) Carilah nilai-nilai $x \in S$ sehingga p bernilai benar.
   b) Carilah nilai-nilai $x \in S$ sehingga $\overline{p}$ bernilai benar.
   c) Jika P adalah himpunan penyelesaian kalimat terbuka $p(x)$ dan P' adalah himpunan penyelesaian kalimat terbuka $\overline{p}(x)$ dalam semesta pembicaraan S, gambarlah P, P', S dalam sebuah diagram Venn.

5. Periksalah kebenaran implikasi berikut. Jika salah berikan contoh kesalahannya.
   a) Jika x=2 maka $2x^2 - 5x + 2 = 0$
   b) Jika ab>0 maka a>0 dan b>0

4.3 KUANTOR UNIVERSAL DAN KUANTOR EKSISTENSIAL

Sebelum lebih jauh ke dalam kontek pembicaran Invers, konvers dan kontra posisi simaklah definisi ***kuantor universal*** dan ***kuantor eksistensial*** dibawah ini :

DEFINISI 5.3.1 :

Misalkan P(x) adalah fungsi pernyataan dengan daerah asal D.

1. *Pernyataan* ***"untuk setiap x, P(x)"*** *dikatakan sebagai pernyataan kuantor universal dan secara simbulik ditulis sebagai berikut*

$$"\forall x; P(x)"$$

Simbul " $\forall$ " disebut ***kuantor universal*** *(*universal quantifier*).*

2. *Pernyataan* ***"untuk beberapa x, P(x)"*** *dikatakan sebagai pernyataan kuantor eksistensial dan secara simbulik ditulis sebagai berikut* $"\exists x; P(x)"$

Simbul " $\exists$ " disebut ***kuantor eksistensial*** *(*existensial quantifier*).*

Jadi pernyataan yang menggunakan kata " semua" atau "setiap" disebut pernyataan ***kuantor universal (umum) ,*** sedangkan pernyataan yang menggunakan kata "Beberapa" atau "ada" ***kuantor eksistensial (khusus)***.

Pernyataan untuk setiap x, $P(x)$ bernilai benar jika untuk setiap $x \in D$, maka $P(x)$ bernilai benar. Pernyataan untuk beberapa x, $P(x)$ bernilai benar jika terdapat sekurang kurangnya satu $x \in D$ sehingga $P(x)$ bernilai benar.

Jadi untuk mengevaluasi sebuah pernyataan dalam bentuk simbulik dan memuat penghubung, kita harus menetapkan daerah asal dari setiap variabelnya dan memberikan interpretasi (makna) terhadap fungsi dan penghubung yang ada didalamnya.

Contoh 5.3.1

Tulislah pernyataan berikut secara simbulik: ***"Untuk setiap bilangan***
bulat positif yang habis dibagi dengan 6 juga habis dibagi dengan 3"

Jawaban:

Misalkan: Penghubung "*x* habis dibagi dengan y" secara simbulik ditulis sebagai *P*(*x*,*y*). Maka penghubung "*x* habis dibagi 6 juga habis dibagi 3" secara simbulik dapat ditulis sbb:

Jika P(x,6) maka P(x,3)

Jadi pernyataan yang ditanyakan secara simbulik dapat ditulis sbb:

$\forall$ ***x, Jika P(x,6), maka P(x,3)***

dengan daerah asal himpunan bilangan bulat positif.

4.3.1 NEGASI DARI PERNYATAAN BERKUANTOR

Seperti yang telah diuraikan sebelumnya bahwa negasi adalah ingkaran dari suatu pernyataan *p* yang dilambangkan dengan $\overline{p}$. Selanjutnya dapat dengan mudah dapat dirumuskan bahwa :

- Negasi dari sebuah kuantor universal pastilah kuantor eksistesial.
- Negasi dari kuantor eksistensial adalah kuantor universal.

Yang dirumuskan sebagai berikut :

- Negasi kuantor universal : $\overline{[\forall x, P(x)]} \equiv \exists x, \overline{P(x)}$
- Negasi kuantor eksistensial : $\overline{[\exists x, P(x)]} \equiv \forall x, \overline{P(x)}$

Contoh 5.3.2

Tentukan negasi dari formula yang memuat kuantor berikut:

1. $\exists x \in R, x^2 - 1 = 0$
2. $\forall x \in R, x^2 + 1 \geq 0$

Jawaban:

1. $\exists x \in R, x^2 - 1 = 0$ suatu pernyataan yang *benar*.

   Sedangkan negasi dari pernyataan tersebut adalah: $\overline{\exists x \in R, x^2 - 1 = 0} \equiv \forall x \in R, x^2 - 1 \neq 0$ Biimplikasi dengan nilai *salah*

2. $\forall x \in R, x^2 + 1 \leq 0$ suatu pernyataan yang *salah*

   Sedangkan negasi dari pernyataan tersebut adalah: $\overline{\forall x \in R, x^2 + 1 \leq 0} \equiv \exists x \in R, x^2 + 1 > 0$ Biimplikasi dengan nilai *benar*.

4.3.2 HUBUNGAN INVERS, KONVERS DAN KONTRAPOSISI

Untuk melihat hubungan antara implikasi dengan konvers, invers dan kontraposisi perhatikan pernyataan implikasi berikut ini :

i. *"Jika Fahim seorang mahasiswa maka Fahim lulus SMA"*.

Dari pernyataan implikasi ini dapat dibuat beberapa pernyataan yang baru :

ii. *Jika Fahim lulus SMA maka Fahim seorang mahasiswa*

iii. *Jika Fahim bukan mahasiswa maka Fahim tidak lulus SMA*

iv. *Jika Fahim tidak lulus SMA maka Fahim bukan seorang mahasiswa*

Pernyataan-pernyataan i, ii, iii dan iv dapat ditulis dalam Pernyataan-pernyataan komponen dalam lambang sebagai berikut :

i. $p \to q$

ii. $q \to p$

iii. $\overline{p} \to \overline{q}$

iv. $\overline{q} \to \overline{p}$

Pernyataan : $q \to p$ disebut ***Konvers*** dari implikasi $p \to q$

Pernyataan : $\overline{p} \to \overline{q}$ disebut ***invers*** dari implikasi $p \to q$

Pernyataan : $\overline{q} \to \overline{p}$ disebut ***Kontraposisi*** dari implikasi $p \to q$

Untuk semua nilai kebenaran dari hubungan nilai-nilai kebenaran implikasi, konvers, invers dan kontraposisi dapat diperlihatkan pada table 5.3.1 sebagai berikut :

Tabel 5.3.1 : Tabel nilai kebenaran

Komponen				*Implikasi*	*Konvers*	*invers*	*kontraposisi*
p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\overline{p} \rightarrow \overline{q}$	$\overline{q} \rightarrow \overline{p}$
B	B	S	S	B	B	B	B
B	S	S	B	S	B	B	S
S	B	B	S	B	S	S	B
S	S	B	B	B	B	B	B

Berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan sebagai berikut

1) Implikasi ekuivalen dengan kontra posisi.
2) Konvers ekuivalen dengan invers.

4.3.3 DUA BUAH PERNYATAAN MAJEMUK YANG EKUIVALEN

Untuk memahami pengertian dua buah pernyataan majemuk yang ekuivalen, perhatikan contoh kalimat berikut ini :

p: Boby tidak malas

q : boby rajin belajar

Dibuat dua buah pernyataan majemuk sebagai berikut:

a : Boby tidak malas maka Boby rajin belajar : $p \rightarrow q$

dengan nilai kebenaran *B*

b : Boby malas atau Boby rajin belajar : $\overline{p} \vee q$

dengan nilai kebenaran *B*.

Dari pernyataan-pernyataan *a* dan *b* dapat dibentuk biimplikasi :

$$a \quad \Leftrightarrow \quad b$$

atau : $p \rightarrow q \quad \Leftrightarrow \quad \overline{p} \vee q$

dengan nilai kebenaran *B.*

Contoh 5.3.3

Dengan menggunakan tabel kebenaran penghubung maka perlihatkan bahwa pernyataan: " $p \rightarrow q$"

ekuivalen dengan pernyataan "$p \vee q$".

Jawaban:

p	q	$p \rightarrow q$	$\overline{p} \vee q$	$p \rightarrow q \Leftrightarrow \overline{p} \vee q$
B	B	B	B	B
B	S	S	S	B
S	B	B	B	B
S	S	B	B	B

Dari tabel dapat dilihat bahwa : $p \rightarrow q \Leftrightarrow \overline{p} \vee q$.

Perhatikan kolom ke 5 dari tabel pada contoh 6.3.1 , *selalu bernilai benar* untuk semua kemungkinan nilai kebenaran dari tiap pernyataan komponennya. Perkataan majemuk yang bersifat seperti itu dikatakan *benar logis* yang disebut ***Tautologi***.

Tautologi yang berbentuk: $a \quad \Leftrightarrow \quad b$

dinamakan ***Ekuivalen Logis*** ditulis dengan lambang $a \equiv b$ (dibaca *a* equivlen *b*) atau (*a* setara dengan *b*)

Sedangkan untuk semua kemungkinan nilai kebenaran dari tiap pernyataan komponennya *selalu bernilai salah*, perkataan majemuk yang bersifat seperti itu dikatakan ***Kontradiksi***. Berikut ini didefinisikan suatu Tautologi dan kontradiksi.

DEFINISI 5.3.2

Tautologi:

Sebuah pernyataan dikatakan bernilai Tautologi (valid), jika pernyataan tersebut bernilai benar terhadap setiap pemberian nilai kebenaran bagi setiap variabelnya.

DEFINISI 5.3.3

Kontradiksi:

Sebuah pernyataan dikatakan bernilai Kontradiksi, jika pernyataan tersebut bernilai salah terhadap setiap pemberian nilai kebenaran bagi setiap variabelnya.

Contoh 5.3.4

Tunjukkan bahwa Pernyataan $p \vee \overline{p}$ *adalah tautologi* dan pernyataan $p \wedge \overline{p}$ *adalah* kontradiksi

Jawab :

Untuk menunjukkan bahwa Pernyataan $p \vee \overline{p}$ *adalah tautology* atau bukan dan pernyataan $p \wedge \overline{p}$ *adalah* kontradiksi atau bukan harus terlebuh dahulu dicari nilai kebenaran untuk semua kemungkinan nilai kebenaran komponennya. Perhatikan table berikut ini :

p	$\overline{p}$	$p \vee \overline{p}$	$p \wedge \overline{p}$
B	S	B	S
S	B	B	S

Jelas bahwa pernyataan majemuk: $p \vee \overline{p}$ selalu benar sedangkan: $p \wedge \overline{p}$ selalu salah.

Jadi Pernyataan $p \vee \overline{p}$ adalah tautologi dan pernyataan $p \wedge \overline{p}$ adalah kontradiksi.

Contoh 5.3.5

Tunjukkan bahwa implikasi $\overline{(p \to q)} \Rightarrow \overline{q}$ bernilai *tautology*.

Jawab

Untuk menunjukkan bahwa Pernyataan $\overline{(p \to q)} \Rightarrow \overline{q}$ *adalah tautology* atau bukan terlebuh dahulu dicari nilai kebenaran untuk semua kemungkinan nilai kebenaran komponennya. Perhatikan tabel berikut ini :

p	q	$p \to q$	$\overline{p \to q}$	$\overline{q}$	$\overline{(p \to q)} \Rightarrow \overline{q}$
B	B	B	S	S	B
B	S	S	B	B	B
S	B	B	S	S	B
S	S	B	S	B	B

Pada kolom 6, nilai selalu benar untuk implikasi : $\overline{(p \to q)} \Rightarrow \overline{q}$

Latihan 5.3

1) Tentukan invers, konvers dan kontraposisi dari setiap implikasi berikut ini:
   a. Jika Taufik Juara All England maka Taufik punya medali.
   b. Jika Abi pegawai negri maka Abi terima gaji.
   c. Jika $\cos n\pi = 0$ maka n bilangan ganjil.

2) Tentukan pernyataan implikasi yang memiliki :

   a) invers $p \rightarrow \overline{q}$

   b) Kontraposisi $\overline{p} \rightarrow q$

3) Tentukan negasi dari setiap pernyataan berkuantor berikut ini :

   a) Setiap bilangan rasional adalah bilangan real.

   b) Terdapat bilangan real *x* sehingga $x^2 - 4x < 0$

   c) Beberapa fungsi kuadrat tidak memotong sumbu *x*.

   d) Tidak semua murid di kelas ini yang lolos SPMB.

   e) Semua segitiga sama sisi mempunyai besar sudut 60^o.

4) Jika N = himpunan bilangan asli, C = himpunan bilangan cacah dan R=himpunan bilangan real. Tentukan negasi dari bilangan berkuantor berikut ini :

   a) $\forall x \in R,\ \ n \in N$ berlaku $\mathrm{n}^{\mathrm{x}} > 0$

   b) $\exists x \in R,$ sehingga $4 < x^2 - 4x < 10$ dan $x \in N$

5) Tunjukkan bahwa implikasi berikut ini adalah Tautologi:

   a) $\overline{(p \rightarrow q)} \rightarrow p$

   b) $p \rightarrow p \vee q$

4.4 SILOGISME, MODUS PONENS DAN MODUS TOLLENS

Silogisme Modus Ponens dan Modus Tollens adalah metode atau cara yang digunakan dalam menarik kesimpulan. Proses penarikan kesimpulan terbagi atas beberapa hipotesa yang diketahui nilai kebenarannya yang kemudian dengan menggunakan prinsip-prinsip logika diturunkan suatu kesimpulan (konklusi). Penarikan kesimpulan ini disebut dengan *argumentasi.*

Berpokir yang logis memberikan keamanan dalam bertindak

Prinsip-prinsip logika yang digunakan untuk menarik suatu kesimpulan adalah sebagai berikut :

i) Argumen dikatakan berlaku atau syah:
   Jika konjungsi dari hipotesa-hipotesanya berimplikasi dengan kesimpulan
ii) Misalkan hipotesa yang diketahui adalah *a* dan *b* sedangkan kesimpulannya adalah *c*, Argumen yang berlaku atau syah:

$$a \wedge b \Rightarrow c$$

iii) Argumen dikatakan berlaku atau syah:
   Jika hipotesa-hipotesanya benar maka kesimpulannya juga benar.

iv) Argumen disusun dengan cara menuliskan hipotesa-hipotesanya barus demi baris kemudian dibuat garis mendatar dan kesimpulan diletakkan baris paling bawah sebagai berikut :

a	Hipotesa 1
b	Hipotesa 2
$\therefore c$	Kesimpulan

Tanda $\therefore c$ dibaca "*Jadi c*" atau "*Oleh karena itu".*

4.4.1 SILOGISME

Proses penarikan kesimpulan yang menggunakan sifat menghantar dari pernyataan implikasi , dilakukan dengan cara menyusun bari-baris :

$p \Rightarrow q$	hipotesa 1
$q \Rightarrow r$	hipotesa 2
$\therefore\ p \Rightarrow r$	kesimpulan

dalam bentuk implikasi, silogisme tersebut dapat ditulis menjadi :

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \quad \Rightarrow \quad (p \Rightarrow r)$$

dimana syah atau tidaknya kesimpulan, dapat dilihat pada tabel berikut ini:

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow r$	$p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow r$	$(p \to q \wedge q \to r) \Rightarrow (p \to r)$
B	B	B	B	B	B	B	B
B	B	S	B	S	S	S	B
B	S	B	S	B	B	S	B
B	S	S	S	B	S	S	B
S	B	B	B	B	B	B	B
S	B	S	B	S	B	S	B
S	S	B	B	B	B	B	B
S	S	S	B	B	B	B	B

Contoh 5.4.1

Tentukan kesimpulan dari argumen berikut :

Jika cuaca mendung maka hari akan hujan .... hipotesa 1.

Jika hari akan hujan maka udara terasa sejuk ....hipotesa 2.

Jawab :

Jika $\boxed{\text{Cuaca mendung}}$ maka $\boxed{\text{Hari akan hujan}}$ ...hipotesa 1

p q

Jika $\boxed{\text{Hari akan hujan}}$ maka $\boxed{\text{udara terasa sejuk}}$ hipotesa 2

q r

$\therefore\ p \Rightarrow r$ kesimpulan

Jadi kesimpulannya: *Jika cuaca mendung maka udara terasa sejuk*

Contoh 5.4.2

Jika x bilangan real, maka $x^2 \geq 0$.............hipotesa 1.

Jika $x^2 \geq 0$, maka $x^2+1 \geq 0$.......................hipotesa 2.

Jawab :

Jika $\boxed{x \text{ bilangan real}}$ maka $\boxed{x^2 > 0}$ ...hipotesa 1

p q

Jika $\boxed{x^2 > 0}$ $\boxed{x^2+1 > 0}$

Maka hipotesa 2

$q \qquad\qquad\qquad\qquad r$

$\therefore\ p \Rightarrow r$

kesimpulan

Jadi kesimpulannya adalah : $\boxed{\text{Jika } x \text{ bilangan real maka } x^2+1 \geq 0}$

4.4.2 MODUS PONENS

Proses penarikan kesimpulan yang menggunakan sifat menghantar dari pernyataan implikasi , dilakukan dengan cara menyusun bari-baris :

$p \Rightarrow q$ hipotesa 1

p hipotesa 2

$\therefore\ q$ kesimpulan

dalam bentuk implikasi, *Modus ponens* tersebut dapat ditulis menjadi :

$$(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$$

yaitu konjungsi dari hipotesa-hipotesanya berimplikasi kesimpulan.

Modus ponens dikatakan syah atau tidaknya kesimpulan apabila implikasi $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ merupakan sebuah Tautologi. Perhatikan tabel berikut ini:

Tabel Tautologi :

p	q	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow q \wedge p$	$(p \rightarrow q \wedge p) \rightarrow q$
B	B	B	B	B
B	S	S	S	B
S	B	B	S	B
S	S	B	S	B

Contoh 5.4.3

Tentukan kesimpulan dari argumen berikut :

Jika turun hujan maka udara terasa sejuk.............hipotesa 1.

Dan turun hujan ....hipotesa 2.

Jawab :

Jika $\boxed{\text{turun hujan}}$ maka $\boxed{\text{udara terasa seiuk}}$ ...hipotesa 1

p q

dan $\boxed{\text{turun hujan}}$ ....hipotesa 2

p

$\therefore q$ kesimpulan

Jadi kesimpulannya adalah : $\boxed{\textit{udara terasa sejuk}}$

Contoh 5.4.4

Jika x bilangan real, maka $x^2+1 \geq 0$ ....hipotesa 1.
Dan x bilangan real ....hipotesa 2.

Jawab :

Jika $\boxed{x \text{ bilangan real}}$ maka $\boxed{x^2+1 \geq 0}$ ...hipotesa 1

p q

dan $\boxed{x \text{ bilangan real}}$ hipotesa 2

p

$\therefore q$ kesimpulan

Jadi kesimpulannya adalah : $\boxed{x^2+1 \geq 0}$

4.4.3 MODUS TOLLENS

Proses penarikan kesimpulan yang menggunakan sifat menghantar dari pernyataan implikasi, dilakukan dengan cara menyusun bari-baris :

$p \Rightarrow q$ hipotesa 1

$\overline{q}$ hipotesa 2

$\therefore \overline{p}$ kesimpulan

dalam bentuk implikasi, Modus ponens tersebut dapat ditulis sebagai:

$$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q} \Rightarrow \overline{p}$$

yaitu konjungsi dari hipotesa-hipotesanya berimplikasi kesimpulan

Modus Tollens dikatakan syah atau tidaknya kesimpulan apabila implikasi.

$$(p \Rightarrow q) \wedge \overline{q} \Rightarrow \overline{p}$$

merupakan sebuah Tautologi. Perhatikan tabel berikut ini:

p	q	$\overline{q}$	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow q \wedge \overline{q}$	$\overline{p}$	$(p \rightarrow q \wedge \overline{q}) \rightarrow \overline{p}$
B	B	S	B	S	S	B
B	S	B	S	S	S	B
S	B	S	B	S	B	B
S	S	B	B	B	B	B

Cara lain menunjukkan syah atau tidaknya sebuah Modus Tollens adalah dengan mengambil kontra posisi dari argumen sebagai berikut:

$$p \Rightarrow q$$

Kontra posisi : $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$

Contoh 5.4.5

Tentukan kesimpulan dari argumen berikut :

Jika turun hujan maka udara terasa sejuk.............hipotesa 1.

Dan tidak sejuk ....hipotesa 2.

Jawab :

Jika $\boxed{\text{turun hujan}}$ maka $\boxed{\text{udara terasa sejuk}}$ ...hipotesa 1

p q

dan $\boxed{\text{udara tidak sejuk}}$ ....hipotesa 2

$\bar{q}$

Kontra posisinya adalah:

Jika $\boxed{\textit{udara tidak sejuk}}$ maka $\boxed{\textit{Tidak turun hujan}}$

Jadi kesimpulannya adalah : $\boxed{\textbf{\textit{Tidak turun hujan}}}$

Contoh 5.4.6

Jika x bilangan real, maka $x^2+1 \geq 0$ ....hipotesa 1.

Dan $x^2+1 < 0$ ....hipotesa 2.

Jawab :

Jika $\boxed{x \text{ bilangan real}}$ maka $\boxed{x^2+1 > 0}$

...hipotesa 1 p q

dan $\boxed{x^2+1 < 0}$ hipotesa 2

$\bar{q}$

Kontra posisinya adalah:

Jika $\boxed{x^2+1<0}$ maka $\boxed{x \text{ bukan bilangan real}}$

Jadi kesimpulannya adalah : $\boxed{\boldsymbol{x} \textbf{ bukan bilangan real}}$

• RANGKUMAN

- Sebuah ***pernyataan*** atau ***proposisi*** adalah sebuah kalimat deklaratif yang mempunyai tepat satu nilai kebenaran.
- Suatu kalimat yang nilai kebenarannya belum dapat dibuktikan disebut ***kalimat terbuka***.
- Penghubung kalimat : negasi, konjungsi, disjungsi, implikasi, dan biimplikasi.
- Sebuah pernyataan dikatakan bernilai ***tautologi*** (valid), jika pernyataan tersebut bernilai benar terhadap setiap pemberian nilai kebenaran bagi setiap variabelnya.

  Sebuah pernyataan dikatakan bernilai ***kontradiksi***, jika pernyataan tersebut bernilai salah terhadap setiap pemberian nilai kebenaran bagi setiap variabelnya.

Latihan 5.4

Untuk Soal no 1-3 tentukan kesimpulan tiap argumen berikut!

1) Jika kena air hujan maka aku sakit

   ....hipotesa1.

   Aku sakit

   ....hipotesa2.

2) Jika *f*(-*x*) = *f*(*x*) maka *f*(*x*) fungsi genap ....hipotesa1.

f(*x*) fungsi genap maka *f*(*x*) simetri terhadap sumbu x ....hipotesa2.

3) Jika $y = ax^2 + bx + c < 0$ maka *y* disebut definit negatip hipotesa1

y bukan definit negatip hipotesa2

Untuk Soal no 4-6 periksalah keabsyahan tiap argumen berikut!

4) $p \Rightarrow q$ hipotesa 1

$\bar{q} \Rightarrow r$ hipotesa 2

$\therefore\ \bar{r} \rightarrow p$ kesimpulan

5) $p \vee q$ hipotesa 1

$\bar{q} \rightarrow p$ hipotesa 2

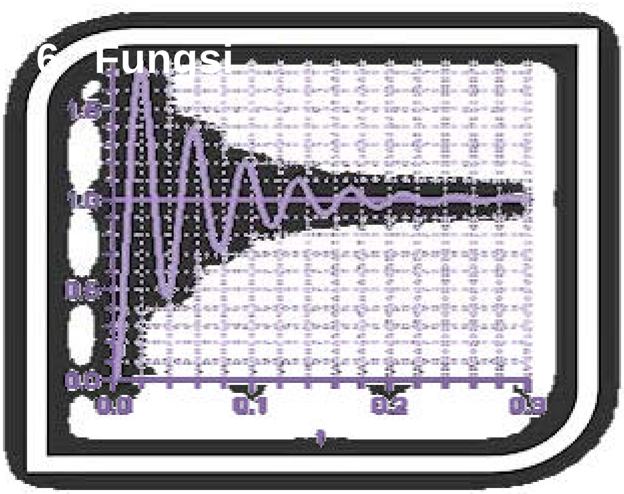
$\therefore\ \bar{q}$ kesimpulan

6) $p \Rightarrow q$ hipotesa 1

$\bar{q} \vee r$ hipotesa 2

p hipotesa 3

$\therefore\ r$ kesimpulan



Bab

6

FUNGSI

Pernahkah anda memperhatikan gerakan bola yang dilempar ke atas oleh seseorng. Secara tidak langsung ternyata anda telah pemperhatikan gerakan bola tersebut membentuk sebuah fungsi yang disebut dengan *Fungsi Parabola* (Gambar 6.1.1). Gambar *a* memperlihatkan sebuah lintasan Parabola jika pengamat berada pada sebuah kereta yang bergerak searah gerakan pelempar bola, sedang gambar *b* juga memperlihatkan sebuah lintasan Parabola jika dilihat pengamat yang diam di tanah.

Pada bab ini akan dibahas materi yang berkaitan dengan fenomena yang diilustrasikan diatas yaitu berkaitan dengan relasi dan fungsi, kemudian dilanjutkan dengan permasalahan yang terkait dengan fungsi yaitu persamaan fungsi linear, fungsi kuadrat, fungsi eksponensial dan fungsi logaritma.

Gambar 6.1.1 Sumber : "*Fisika*"Tipler

6.1 FUNGSI DAN RELASI

Topik penting yang sering dijumpai dalam matematika adalah relasi dan fungsi. Kedua topik ini muncul karena adanya hubungan atau ketergantungan antara satu besaran dengan besaran lainnya. Seringkali, hubungan ini didapatkan dari permasalahan yang kita hadapi sehari-hari. Sebagai contoh, adanya hubungan antara pegawai pada suatu perusahaan dengan bagian/departemen tertentu pada perusahaan tersebut, hubungan antara luas lingkaran dengan panjang jari-jarinya, hubungan antara nama-nama siswa dalam suatu kelas dengan kesukaan (hobby)nya, hubungan antara nama-nama kabupaten di suatu propinsi

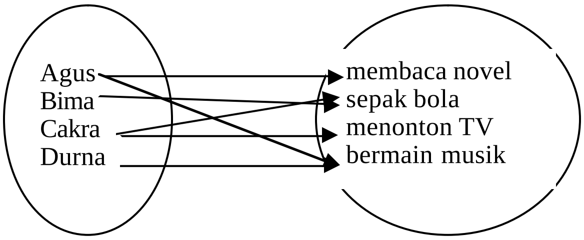
dengan jumlah penduduknya, hubungan antara biaya produksi dengan jumlah produk yang dihasilkan oleh sebuah pabrik, dan lain-lain.
Dari beberapa contoh diatas, dapat dimengerti bahwa suatu relasi terjadi antara satu kelompok tertentu dengan kelompok lainnya, misalnya antara kelompok siswa dengan kelompok hoby. Dalam matematika, istilah kelompok ini dikenal dengan istilah **himpunan**. Setiap himpunan mempunyai anggota (himpunan yang tidak mempunyai anggota disebut himpunan kosong). Dalam penulisannya, suatu himpunan biasanya dinyatakan dengan huruf kapital (huruf besar), misal A, B, C,.... sedangkan anggota himpunan dinyatakan dengan huruf kecil, misal a, b, c, ... **Relasi** dari himpunan A ke himpunan B didefinisikan sebagai aturan yang memadankan/memetakan anggota-anggota himpunan A dengan anggota-anggota himpunan B. Untuk memperjelas konsep ini, perhatikan contoh 6.1.1 yang menyatakan relasi antara himpunan siswa dengan himpunan kesukaan:

Contoh 6.1.1

A = himpunan siswa dalam suatu kelas
= {Agus, Bima, Cakra, Durna}
B = himpunan kesukaan
= {membaca novel, sepak bola, menonton TV, bermain musik}
Relasi antara kedua himpunan misalkan ditentukan berikut:

- Agus suka membaca novel dan bermain musik
- Bima menyukai sepakbola
- Durna suka bermain musik
- Cakra suka sepakbola dan menonton TV

Relasi ini dapat digambarkan dalam bentuk diagram berikut:



atau dapat juga dinyatakan dengan himpunan pasangan terurut sebagai berikut:

{(Agus, membaca novel), (Agus, bermain musik), (Bima, sepakbola), (Durna, bermain musik), (Cakra, sepakbola), (Cakra, menonton TV)}

Fungsi merupakan salah satu bentuk khusus dari relasi. Misalkan A dan B adalah dua himpunan, dimana anggota himpunan B tergantung pada anggota himpunan A. misalkan pula x adalah anggota A dan y adalah anggota B. **Fungsi** dari A ke B adalah aturan yang memadankan setiap anggota dalam himpunan A dengan tepat pada satu anggota dalam himpunan B. Kita dapat mendefinisikan secara formal dalam definisi 6.1.1 berikut :

Definisi 6.1.1:

Sebuah **fungsi *f*** adalah suatu aturan padanan yang menghubungkan tiap obyek x dalam satu himpunan yang disebut **daerah asal**, dengan sebuah nilai unik/tunggal $f(x)$ dari himpunan kedua. Himpunan nilai yang diperoleh disebut **daerah nilai** fungsi tersebut.

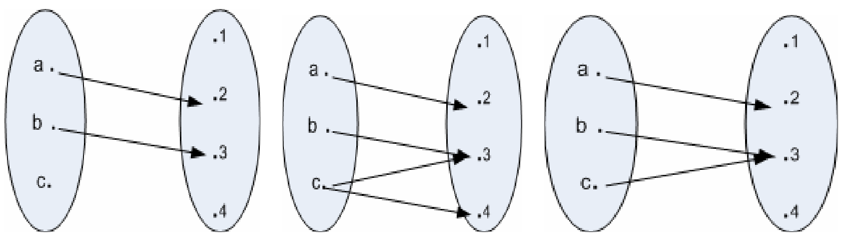
Dengan kata lain, pemetaan dari x terhadap y disebut fungsi jika:

- untuk setiap x dalam A dapat dicari nilai y dalam B yang merupakan nilai/ pasangannya, dengan kata lain x dikaitkan dengan y dan ditulis dengan $\boldsymbol{y=f(x)}$
- untuk satu x kita mempunyai satu dan hanya satu nilai y.

Himpunan A disebut daerah asal atau **domain** dan himpunan B disebut daerah kawan atau **kodomain**. Himpunan bagian dari B, misalkan R, yang berisi nilai-nilai yang merupakan hasil dari penerapan fungsi atas anggota dari daerah asal disebut daerah hasil atau **range**. Untuk memperjelas konsep diatas, perhatikan dua contoh berikut ini.

Contoh 6.1.2

Diberikan 3 contoh relasi pada Gambar 6.1.2 (a), (b), dan (c), tentukan mana yang fungsi dan yang bukan fungsi.



(a) (b) (c)

Gambar 6.1.2

Jawab:

Pada Gambar 6.1.2(a) elemen c di daerah asal tidak dipetakan pada daerah hasil, sedangkan Gambar 6.1.2(b) elemen c mempunyai kawan lebih dari satu di daerah hasil maka 2(a) dan 2(b) hanyalah sebuah relasi dan bukan menyatakan fungsi dari A ke B. Pemetaan pada Gambar 6.1.2(c) merupakan fungsi karena kedua syarat fungsi dipenuhi. Pada Gambar 6.1.2(c), domain fungsi adalah himpunan A dan kodomainnya adalah B. Karena nilai fungsi hanya 2 dan 3 saja maka range fungsi adalah R = {2, 3}.

Contoh 6.1.3

Berdasarkan pengalaman penyelam, tekanan cairan p bergantung pada kedalaman d. Berdasarkan data selama penyelaman yang dilakukan, hubungan antara p dan d tersebut dapat dinyatakan dalam tabel berikut:

kedalaman (d)	Tekanan cairan (p)
10 meter	2,1 atm.
20 meter	3,2 atm.
30 meter	4,3 atm.
40 meter	5,4 atm.
50 meter	6,5 atm.
60 meter	7,6 atm.
70 meter	8,7 atm.
80 meter	9,8 atm.
90 meter	10,9 atm.

Tentukan apakah hubungan tersebut menyatakan fungsi ?.

Jawab:

Pada contoh diatas, pemetaan dari A ke B dapat digambarkan sebagai berikut : kawan dari 10 adalah 2,1, kawan dari 20 adalah 3,2 dan kawan dari 30 adalah 4,3 dan seterusnya. Hukum fisika juga mengatakan bahwa tekanan cairan p bergantung pada kedalaman d. Jadi tidak mungkin terjadi pada kedalaman yang sama mempunyai tekanan yang berbeda. Jadi f merupakan fungsi yang dapat dituliskan sebagai berikut: $f(10) = 2,1$, $f(20) = 3,2$, dan $f(30) = 4,3$ dan seterusnya. Karena kedalaman yang diperoleh dari data: $0 \leq d \leq 90$, maka daerah asal (domain) fungsi tersebut yaitu A adalah bilangan positip yang dapat ditulis A={d / $0 \leq d \leq 90$), daerah kawan (kodomain) fungsi yaitu

B tekanan adalah lebih atau sama dengan 1 (satu) atau dapat ditulis B={p / $2{,}1 \leq p \leq 10{,}9$}.

6.1.1 JENIS-JENIS FUNGSI

Ditinjau dari cara mengkawankannya, fungsi dapat dibedakan menjadi 3 jenis yaitu fungsi injektif, surjektif, dan bijektif. Jenis fungsi tersebut ada kaitannya dengan sifat pemetaan dari daerah asal ke daerah hasil . Ketiga jenis fungsi tersebut adalah :

i) Fungsi Injektif
ii) Fungsi Surjektif
iii) Fungsi Bijektif

Definisi .2 :

Misalkan f adalah fungsi dari himpunan A ke B maka:

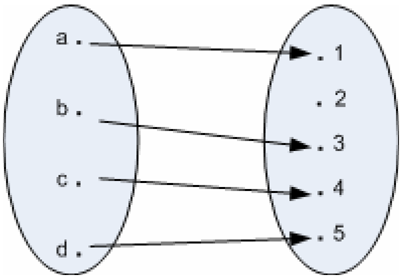
i) Fungsi f disebut *injektif* jika untuk setiap elemen y di daerah nilai B,maka y paling banyak mempunyai satu kawan dari x di A. Dengan kata lain, *fungsi injektif adalah fungsi satu -satu.*

ii) Fungsi f disebut *surjektif* jika untuk setiap elemen y di B habis dipetakan oleh anggota himpunan di A. Nama lain dari fungsi surjektif adalah mempunyai kawan (pra-peta) di daerah definisi atau daerah asal fungsi f.

iii) Fungsi f disebut bijektif jika fungsi itu Injektif dan surjektif

Contoh 6.1.4

Diketahui fungsi *f* dengan aturan pemetaan seperti pada Gambar 8.1.4 Tunjukkan bahwa fungsi tersebut injektif.



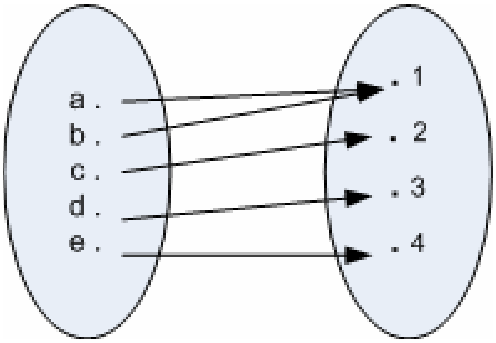
Gambar 6.1.4

Jawab:

Pertama dicari dulu daerah hasil (range) fungsi tersebut yaitu {1,3,4,5} dan kodomain B = {1, 2, 3, 4, 5}. Sekarang kita selesaikan persamaan $f(x) = y$ jika y anggota {1, 3, 4, 5} di daerah hasil. y=1 merupakan pemetaan hanya satu anggota dari daerah asal yaitu x=a. Jika $y = 3$ merupakan pemetaan hanya satu anggota dari daerah asal yaitu x=b. Demikian juga, jika $y = 4, 5$ maka merupakan pemetaan hanya satu anggota dari daerah asal yaitu masing-masing c dan d. Dengan demikian, *f* adalah injektif (fungsi satu-satu).

Contoh 6.1.5

Diketahui fungsi f dengan aturan pemetaan seperti pada Gambar 6.1.5. Tunjukkan bahwa fungsi itu surjektif.



Gambar 6.1.5

Jawab:

Dari gambar tampak bahwa A = (a, b, c, d, e } dan B = {1, 2, 3, 4}.

Kemudian kita uji persamaan $f(x)=y$ dengan y semua kemungkinan elemen di B.

Jika y=1 maka persamaan tersebut merupakan pemetaan f(a)= 1,f(b)=1.

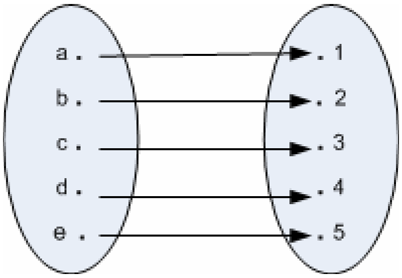
Kemudian untuk y=2 merupakan pemetaan dari f(c)=2.

Demikian pula untuk y=3 merupakan pemetaan dari f(d)=3 dan untuk y=4 diperoleh dari pemetaan f(e)=4.

Karena untuk semua y, persamaan selalu mempunyai jawaban, maka fungsi yang diketahui bersifat surjektif.

Contoh 6.1.6

Diketahui fungsi f dengan aturan pemetaan seperti pada Gambar 6.1.6. Perlihatkan bahwa f adalah bijektif



Gambar 6.1.6

Jawab:

Kita harus menguji bahwa persamaan $y=f(x)$ dengan y anggota B harus mempunyai jawab dan banyaknya jawab hanya satu. Dari gambar tersebut dapat dibuat tabel sebagai berikut:

Ruas kanan y	Jawab persamaan x
1	a
2	b
3	c
4	d
5	e

Karena untuk setiap y anggota B persamaan $y=f(x)$ selalu merupakan teman pemetaan di x dan paling banyak satu, maka f adalah fungsi yang bersifat bijektif.

Latihan 6.1

1. Diketahui fungsi $f(x) = x - 2$ dengan daerah asal $D = \{x \mid 0 \le x \le 5, x \in R\}$
   a. Tentukan nilai fungsi untuk $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$, dan $x = 5$
   b. Gambarkan sketsa grafik untuk fungsi f
   c. Tentukan apakah fungsi tersebut surjektif, injektif atau bijektif
   d. Tentukan daerah hasil (kodomain) dari fungsi f
2. Diketahui fungsi $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ dengan daerah asal $D = \{x \mid 2 \le x \le 5 \;\; dan \;\; x \in R\}$
   a. Tentukan nilai fungsi untuk $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$ dan $x = 5$
   b. Gambarkan sketsa grafik untuk fungsi f
   c. Tentukan apakah fungsi tersebut surjektif, injektif atau bijektif
   d. Tentukan daerah hasil (kodomain) dari fungsi f.
3. Tentukan apakah fungsi $f(x) = x^2, x \in R$ fungsi surjektif, injektif atau bijektif. Bagaimana Anda menentukan domain fungsi supaya fungsi tersebut bersifat bijektif?
4. Tentukan daerah asal alami fungsi-fungsi berikut :
   a. $f(x) = 3x - 2$ b. $f(x) = x^2 - 2$
   c. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ d. $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$
5. Misalkan $y^2 = x$.
   (a) Jika $x = 5$, Carilah nilai y.
   (b) Apakah $y^2 = x$ merupakan fungsi.

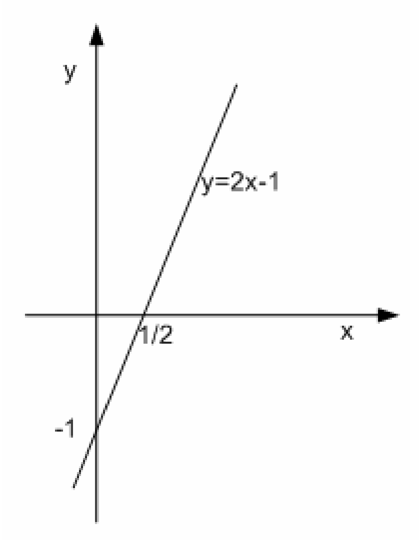
6.2 FUNGSI LINIER

Suatu fungsi $y=f(x)$ disebut fungsi linier jika aturan untuk mengawankan antara x dan y yang berbentuk $y = mx + b$

dengan m dan b adalah bilangan real. Daerah definisi dan daerah hasil terbesar dari fungsi ini adalah himpunan bilangan real. Jika fungsi ini dinyatakan dalam bentuk grafik, maka grafik dari fungsi ini akan berbentuk garis lurus, dengan m menyatakan nilai kemiringan garis terhadap sumbu X dan b adalah perpotongan garis dengan sumbu Y.

garis Lurus merupakan grafik dari fungsi linier

Ciri khas fungsi linier adalah dia tumbuh pada laju tetap. Sebagai contoh, Gambar 6.2.1 menunjukkan grafik fungsi linier $y = 2x - 1$ dan tabel beberapa nilai sampel. Perhatikan bahwa jika nilai x bertambah 1 maka nilai y bertambah 2, sehingga nilai y bertambah 2 kali lebih cepat dari x. Jadi, kemiringan grafik $y = 2x - 1$ yaitu 2, dapat ditafsirkan sebagai laju perubahan y terhadap x.



Gambar 6.2.1

Nilai x	Nilai $y = 2x - 1$
-1	-3
0	-1
1	1
2	3
3	5

6.2.1 MENGGAMBAR GRAFIK FUNGSI LINIER

Fungsi linier mempunyai keistimewaan yaitu jika diketahui nilai dari dua anggota, maka aturan keseluruhannya dapat diketahui. Sifat ini serupa dengan garis. Melalui dua titik kita dapat menentukan satu garis. Dengan demikian, untuk menggambar grafik fungsi linier dapat dilakukan dengan cara berikut:

- tentukan dua buah nilai x sembarang, kemudian tentukan nilai y untuk masing-masing nilai x berdasarkan aturan fungsi tersebut, sehingga kita dapatkan dua buah titik yang memenuhi fungsi tersebut
- plot dua titik tersebut pada bidang koordinat, kemudian hubungkan kedua titik tersebut sehingga akan terbentuk garis lurus. Garis lurus inilah grafik fungsi linier $y = mx + b$

Untuk memperjelas hal ini, perhatikan contoh berikut.

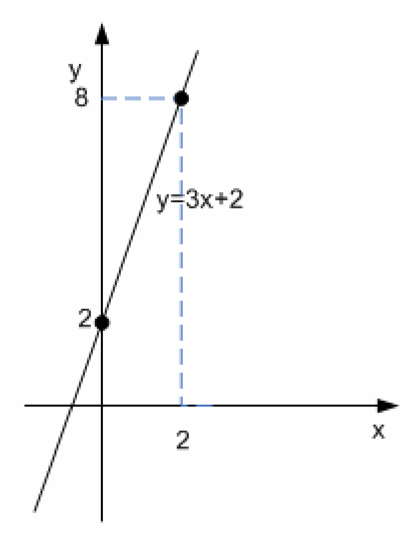
Contoh 6.2.1

Diketahui fungsi linier $y = 3x + 2$. Gambarlah grafik fungsi tersebut.

Jawab:

Pertama, pilihlah dua titik x, misalkan x=0 dan x=3. Kemudian hitung nilai y untuk masing-masing nilai x. Untuk x = 0 maka y = 3.0 + 2 = 2, sehingga didapatkan titik yang memenuhi fungsi tersebut yaitu (0, 2) dan untuk x = 2 maka y = 3.2 + 2 = 8 sehingga didapatkan titik (2,8).

Grafik fungsi $y = 3x + 2$ berupa garis lurus, sehingga cukup menghubungkan keduatitik (0,2) dan (2,8), sehingga kita dapatkan grafiknya gambar 6.2.2

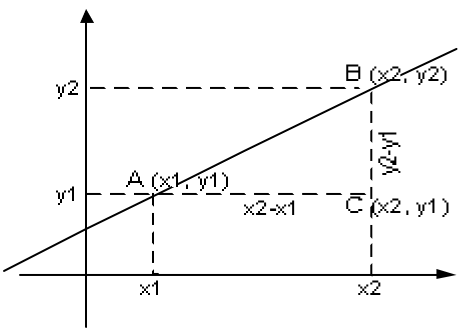


Gambar 6.2.2: Grafik fungsi $y = 3x + 2$

Karena bentuk umum dari fungsi linier $y = mx + b$ merupakan persamaan garis lurus, maka kita bisa menentukan persamaan grafik fungsi linier (garis lurus) dengan beberapa cara, antara lain:

- menentukan persamaan garis lurus jika diberikan dua titik yang dilalui garis tersebut
- menentukan persamaan garis lurus jika diketahui gradien dan satu titik yang dilalui garis tersebut
- menentukan persamaan garis lurus jika diketahui grafiknya

Seperti dijelaskan diatas, pada persamaan garis lurus $y = mx + b$, nilai m merupakan kemiringan garis terhadap sumbu X atau lebih dikenal dengan istilah ***gradien*** garis lurus tersebut. Sebagai contoh, persamaan garis $y = 3x + 2$ mempunyai gradien 3 dan persamaan $y = -x - 3$ mempunyai gradien -1. Jadi, untuk menentukan persamaan garis lurus, kita harus bisa menentukan dan mendapatkan gradien garis tersebut (Gambar 6.2.3). Misalkan garis ini melalui dua titik A (x_1, y_1) dan B (x_2, y_2). Dari gambar tersebut dapat diperoleh kemiringan garis tersebut. Untuk mendapatkan gradien garis lurus, perhatikan gambar garis lurus berikut:



Gambar 6.2.3

Dari gambar garis lurus diatas, dapat dibuat suatu segitiga siku-siku ACB. Dapat ditunjukkan bahwa gradien garis lurus adalah:

$$\boxed{grad_{AB} = m_{AB} = \frac{panjang sisi\ \ tegak\ \ BC}{panjang\ sisi\ \ miring\ AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_1 \neq x_2}$$

Contoh 6.2.2

Tentukam Gradien garis yang melalui titik-titik A(0, 2) dan B(2, 8)

Jawab

Gradien garis yang melalui titik-titik A(0, 2) dan B(2, 8) adalah

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-2}{2-0} = \frac{6}{2} = 3$$

6.2.2 PERSAMAAN GARIS LURUS YANG MELALUI SEBUAH TITIK DENGAN GRADIEN DIKETAHUI.

Melalui sebuah titik sebarang dapat dibuat tak berhingga garis, tetapi melalui satu titik dan satu kemiringan hanya dapat dibuat satu garis. Bagaimana cara mendapatkan Garis L : $y = mx + b$ yang melalui sebuah titik A(x_1, y_1) dengan gradien *m*. Misalkan B(x, y) adalah sebarang titik pada garis L maka pastilah persamaan garis itu adalah :

$$y = mx + b$$

Oleh karena persamaan garis lurus tersebut melalui sebuah titik A(x_1, y_1) maka (x_1, y_1) memenuhi persamaan garis L : $y = mx + b$

sehingga $y_1 = mx_1 + b$

Dari kedua persamaan yang kita peroleh, disubtitusikan :

$$y - mx = y_1 - mx_1$$

Atau

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)} \qquad (6.2.1)$$

6.2.3 PENENTUAN PERSAMAAN GARIS LURUS YANG MELALUI DUA TITIK

Seperti dijelaskan diatas, komponen penting dalam persamaan garis $y = mx + b$ adalah gradien garis (m) dan komponen perpotongan dengan sumbu Y yaitu $y(0)$=b. Untuk mendapatkan persamaan garis lurus yang melalui dua titik A dan B, kita bisa menentukan nilai m terlebih dahulu dengan rumus pencarian gradien yang melalui satu titik dengan cara sebagai berikut: Misalkan persamaan garis $y = mx + b$. Melalui titik (x_1, y_1) maka persamaan $y = mx + b$ berlaku untuk pasangan (x_1, y_1) sehingga $y_1 = mx_1 + b$ diperoleh $b = y_1 - mx_1$. Oleh karena itu persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan mempunyai gradien m adalah :

$$y = mx + b$$

$$y = mx + (y_1 - mx_1)$$

$$y - y_1 = mx - mx_1)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Dengan cara yang sama kita bisa juga mendapatkan persamaan garis lurus yang melalui titik B (x_2, y_2) adalah:

$$y - y_2 = m(x - x_2)$$

yang akan menghasilkan persamaan dari sebuah garis yang sama. Dengan mensubtitusikan kedua persamaan yang didapat, kita peroleh persamaan garis melalui dua buah titik :

$$\boxed{\frac{y - y_2}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}} \qquad (8.2.2)$$

6.2.4 KEDUDUKAN DUA BUAH GARIS LURUS

Misalkan ada dua buah garis lurus L_1 : $y_1 = m_1 x + b$

dan L_2 : $y_2 = m_2 x + b$

Kedudukan L_1 terhadap L_2 tergantung pada tangen arah kedua garis tersebut, yaitu m_1 dan m_2 yang dapat diuraikan pada sifat kedudukan dua buah garis lurus sebagai berikut :

i). Jika $m_1 = m_2$ maka kedua garis L_1 dan L_2 saling sejajar.

ii). Jika $m_1 . m_2 = -1$ maka kedua garis L_1 dan L_2 saling tegak lurus.

iii). Jkal $m_1 \neq m_2$ dan $m_1 . m_2 \neq -1$ maka kedua garis berpotongan.

6.2.5 INVERS FUNGSI LINIER

Jika hasil pemetaan fungsi $y = f(x)$ dipetakan lagi oleh pemetaan g hasilnya kembali ke titik semula yaitu x, $g(f(x))=x$ maka g dikatakan invers dari f. Salah satu ide menentukan invers $y = f(x)$ adalah mengubah x sebagai fungsi dari y, yaitu $x = g(y)$. Kadang-kadang proses seperti itu merupakan proses yang mudah atau ada kalanya cukup rumit. Namun untuk fungsi linier, proses mengubah $y = f(x)$ menjadi $x = g(y)$ cukuplah sederhana. Sebagai contoh fungsi linier

$$y = 5x + 1 \qquad (y = f(x))$$

Mengubah x sebagai fungsi dari y:

$$x = \frac{1}{5}(y - 1) \qquad (x = g(y))$$

Perhatikan $x = g(y)$, jika x diganti dengan y dan y diganti dengan x diperoleh fungsi $y = g(x)$, proses yang demikian ini merupakan *proses menentukan fungsi invers*. Jadi $y = g(x)$ invers dari $y = f(x)$ dan $y = f(x)$ invers dari $y = g(x)$. Secara formal fungsi invers dberikan sebagai berikut :

> Definisi 6.3 :
>
> Jika $y=f(x)$ dan $y=g(x)$ adalah fungsi dan jika $f(g(x)) = x$ atau $g(f(x)) = x$ maka f invers dari g atau g invers dari f .

Contoh 6.2.3

Dapatkan persamaan garis lurus yang melalui titik-titik A(0, 2) dan B(2, 8).

Jawab:

Menentukan persamaan garis lurus melewati titik A(0, 2) dan B(2, 8) adalah sebagai berikut :

$$\frac{y-y_2}{y_1-y_2}=\frac{x-x_2}{x_1-x_2}$$

$$\frac{y-2}{8-2}=\frac{x-0}{2-0}$$

$$y=3x+2$$

Contoh 6.2.4

Tentukan apakah garis-garis berikut sejajar, berpotongan, jika berpotongan tentukan titik potongnya.

$p : 2y = 6x + 2$; $r : y = -\frac{1}{3}x + 1$; $s : y + 2x + 1 = 0$

Jawab :
$p : 2y = 6x + 2$ mempunyai gradien $m = 3$

$r : y = -\frac{1}{3}x + 1$ mempunyai gradien $m = -\frac{1}{3}$

$s : y = -2x - 1$ mempunyai gradien $m = -2$

Jadi garis p berpotongan secara **tegak lurus** dengan garis r , dan garis p berpotongan dengan garis s, garis r berpotongan dengan garis s.

Titik potong garis p dan r : (0,1)

Titik potong garis p dan s : $(\frac{-2}{5}, \frac{-1}{5})$

Titik potong garis r dan s: $(\frac{-6}{5}, \frac{7}{5})$

Contoh 6.2.5

Tentukan invers dari fungsi $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ dan jika diketahui

Jika $f^{-1}(x) = 5$ tentukan nilai x.

Jawab:

y$= -\frac{1}{2}x + 1$ maka $x = 2(1 - y)$ Jadi $f^{-1}(x) = 2 - 2x$.

dan $x = f(f^{-1}(x)) = f(5) = -\frac{3}{2}$

Soal Latihan 6.2

1. Tentukan aturan fungsi linear yang mempunyai nilai 2 di x = -3 dan mempunyai nilai -2 di x = -1.
2. Diketahui persamaan garis $y = 3x - 2$
   (a). Tentukan gradien dan titik potong fungsi pada sumbu y
   (b) Ujilah apakah titik (-2,-8) terletak pada garis tersebut.
   (c) Jika koordinat pertama titik pada (a) ditambah satu, bagaimana nilai dari koordinat kedua.
3. Gambarkan sketsa grafik untuk fungsi-fungsi linier berikut:

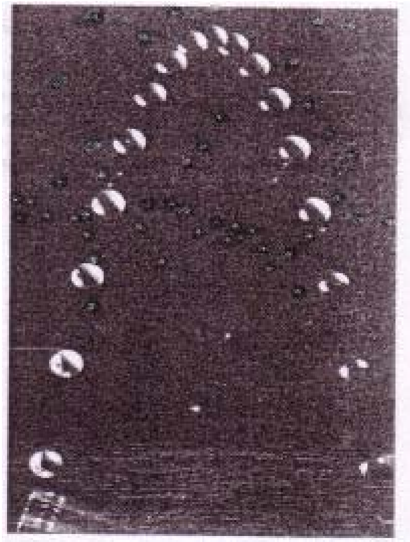
   (a). $y = -3x + 5$ (b). $y = -\frac{3}{2}x - 4$

   (c). $y = x + \frac{2}{5}$ (d). $2y = 3x - 5$
4. Dapatkan kemiringan sisi-sisi segi tiga dengan titik sudut- titik sudut (-1,2), (6.5) dan (2,7).
5. Diketahui persamaan garis dan titik (a, b) pada garis tersebut. Jika koordinat pertamakita tambah satu, maka koordinat kedua akan bertambah 4. Tentukan pertambahan/pengurangan koordinat kedua jika koordinat pertama ditambah 2.
6. Berdasarkan pengalaman penyelam, tekanan cairan p bergantung pada kedalaman d yang memenuhi rumus $p = kd + 1$ dengan k konstan.
   (a) Hitunglah tekanan pada permukaan cairan.
   (b) Jika tekanan pada kedalaman 100 meter adalalh 11 atm, hitunglah tekanan pada kedalaman 50 meter.

7. Pengelola sebuah pasar kaget pada akhir minggu mengetahui dari pengalaman bahwa jika ia menarik x dolar untuk sewa tempat di pasar itu, maka banyaknya lokasi y yang dapat disewakan diberikan dalam bentuk persamaan $y = 200 - 4x$
   (a).Sketsalah grafik fungsi linier (Perhatikan bahwa sewa tiap lokasi dan banyaknya lokasi yang disewakan tidak dapat bernilai negatip)
   (b).Apa yang dinyatakan oleh kemiringan perpotongan sumbu-y dan perpotongan sumbu-x dari grafik?
8. Kaitan antara skala suhu Fahrenheit (F) dan Celsius (C) diberikan oleh fungsi linier $F = \frac{9}{5}C + 32$.
   (a). Sketsalah grafik fungsi F
   (b). Berapa kemiringan grafik dan apa yang dinyatakannya?
9. Suatu titik mula-mula berada pada posisi ((7.5), bergerak sepanjang gaeis dengan kemiringan m = -2 ke posisi baru (x , y)
   a). Dapatkan nilai y jika x = 9.
   b). Dapatkan nilai x jika y = 12.
10. Klasifikasikan garis-garis yang diberikan : sejajar, tegak lurus atau tidak keduanya.
   a) $y = 4x - 7$ dan $y = 4x + 9$
   b) $y = -\frac{3}{2}x - 4$ dan $y = 7 - \frac{1}{2}x$
   c) $10x - 6y + 7 = 0$ dan $5x - 3y + 6 = 0$
   d) $y - 2 = 4(x - 6)$ dan $y - 7 = \frac{1}{4}(x - 3)$

6.3 FUNGSI KUADRAT

Fungsi dari Garis lengkung yang menarik untuk dipelajari adalah fungsi yang mempunyai bentuk persamaan kuadrat. Di alam ini yang secara tidak langsung lengkungan yang mempunyai bentuk persamaan kuadrat telah anda kenal adalah bentuk-bentuk pada jembatan gantung, daun jendela yang lengkung, jarak yang ditempuh oleh lemparan bola secara vertical terhadap waktu (Gambar 6.3.1) dan masih banyak lagi contoh contoh fungsi kuadrat.

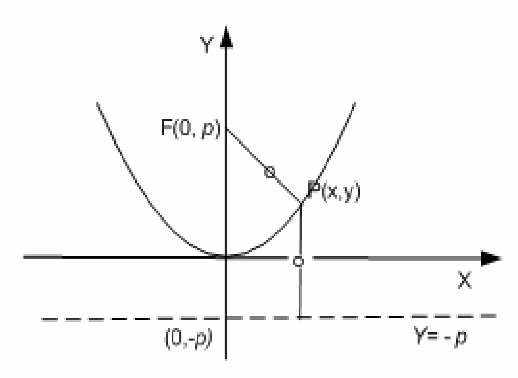


Gambar 6.3.1
Lintasan Bola berupa Parabola

Grafik fungsi kuadrat ini disebut ***Parabola***.
Paraboia diperoleh dengan menentukan tempat kedudukan atau himpunan semua titik-titik yang berjarak sama terhadap sebuah garis *l* dan sebuah titik (Gambar 6.3.2). Titik tetap tersebut dikatakan *focus* dan garis tersebut dikatakan *Garis arah*. Jika fokus F disebelah atas titik asal, misalkan di $(0, p)$, garis arah kita ambil di sebelah bawah titik asal dengan persamaan $y = -p$, dan jika suatu titik (x, y) terletak pada lengkungan parabola jika dan hanya jika

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-(-p))^2}$$

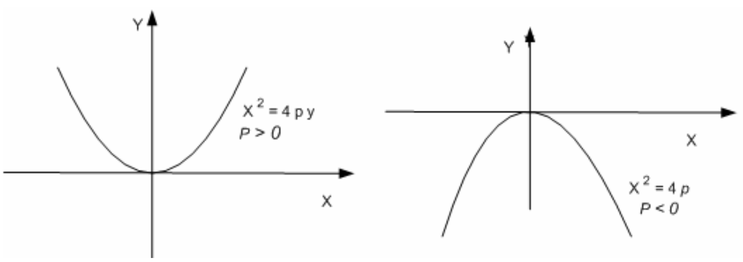
atau ekivalen dengan : $\boxed{x^2 = 4py}$ (6.3.1)



Gambar (6.3.2)

Persamaan (6.3.1) disebut ***Bentuk Baku*** sebuah Persamaan parabola yang terbuka ke atas, dan jika $p > 0$ maka p merupakan jarak dari fokus ke puncaknya.

Fungsi kuadrat mempunyai 2 jenis baku yang berbentuk Parabola, tergantung dari terbukanya parabola mengarah kemana. Misalkan persamaan parabola diberikan oleh $x^2 = 4py$, jika $p > 0$ maka parabola terbuka keatas dan jika $p < 0$ maka terbuka kebawah. Kedua jenis parabola itu dapat dilihat pada Gambar 6.3.3.



Gambar 6.3.3

Contoh 6.3.1 :

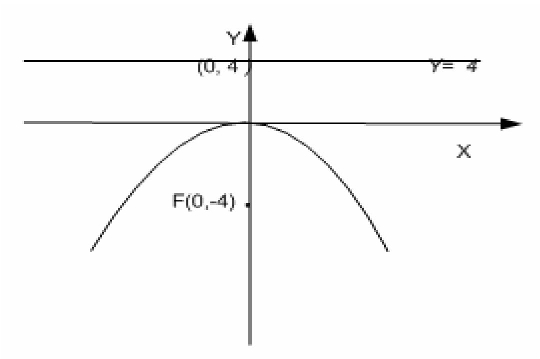
Tentukan fokus dan garis arah parabola serta sketsa parabolanya untuk persamaan $x^2 = -16y$.

Penyalesaian :

Oleh karena persamaan parabola diketahui $x^2 = -16y$ maka parabola terbuka ke bawah dan puncaknya berada di titik asal. Fokus diperoleh dari nilai p untuk persamaan $x^2 = 4py$. Dari $x^2 = -16y$ diperoleh

$$x^2 = 4(-4)y, \text{ maka } p = -4.$$

Sehingga fokus berada di (0,-4), dan garis arahnya adalah y = 4.



6.3.1 BENTUK UMUM PARABOLA

Bentuk umum persamaan fungsi kuadrat (parabola) yang mempunyai puncak di (q,r) adalah :

$$(x-q)^2 = 4p(y-r) \qquad (6.3.2)$$

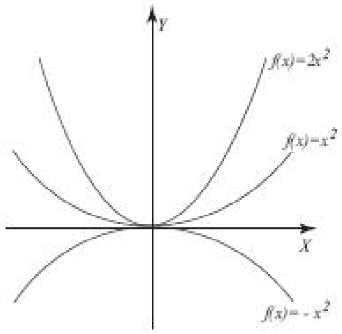
Persamaan tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk ekivalen :

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c} \tag{6.3.3}$$

dengan $a = -\frac{1}{4p}$, $b = \frac{r}{2p}$, $c = \frac{r^2 - 4pq}{4p}$.

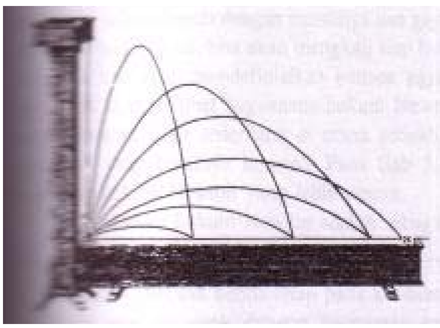
Persamaan (6.3.3) merupakan *Persamaan kuadrat dalan x* yang grafiknya berupa *parabola*. dengan *a, b* dan *c* bilangan real diketahui dan $a \neq 0$. Daerah asal terbesar dari fungsi kuadrat ini adalah seluruh bilangan real. Jika tidak dibatasi nilainya, fungsi ini mempunyai daerah asal seluruh bilangan real. Grafik parabola memiliki satu diantara dua bentuk yang ditunjukkan gambar (6.3.4) tergantung koefisien variabel yang berpangkat dua. Parabola dengan Persamaan (6.3.3) terbuka keatas jika $a > 0$, terbuka ke bawah jika $a < 0$. Dengan demikian untuk persamaan $x = ay^2 + by + c$ merupakan parabola yang terbuka ke kanan jika $a > 0$, terbuka ke kiri jika a < 0. (Persamaan $x = ay^2 + by + c$ bukan termasuk fungsi, tetapi suatu relasi yang gambarnya berupa parabola). Nilai fungsi pada suatu titik $x = t$ dapat dihitung dengan mengganti *x* dengan *t*. Sebagai contoh, $f(x) = 2x^2 + x - 3$ adalah fungsi kuadrat dengan a = 2, b = 1 dan c = -3. Nilai $f(x)$ untuk $x = 2$ adalah $f(2) = 2(2^2) + 2 - 3 = 7$.

Sekarang kita tinjau kembali fungsi kuadrat yang mempunyai bentuk paling sederhana yaitu fungsi yang mempunyai aturan $f(x) = x^2$. Grafik fungsi ini terletak di atas sumbu *X* sebab untuk semua nilai *x*, fungsi bernilai positif. Karena nilai fungsi untuk $x = t$ sama dengan $x = -t$, maka grafik fungsi ini simetri terhadap sumbu Y . Selanjutnya sumbu Y disebut *sumbu simetri*. Titik (0,0) merupakan titik paling rendah/minimum dan disebut titik balik atau puncak parabola. Sebutan yang biasa dari grafik parabola ini adalah membuka ke atas dengan titik balik minimum (0,0). Grafik dari fungsi kuadrat dengan aturan $f(x)=ax^2$ serupa dengan grafik $f(x) = x^2$, dapat diperoleh dari x^2 dengan mengalikan setiap koordinat dengan a. Grafik $f(x) = ax^2$ dengan $a>0$ akan membuka ke atas. Sedangkan grafik $f(x) = ax^2$ dengan $a < 0$ akan membuka ke bawah. (perhatikan Gambar 6.3.4)



Gambar 6.3.4. Grafik beberapa fungsi y = ax^2

6.3.2 MENENTUKA PUNCAK, PERSAMAAN SUMBU SIMETRI DAN KOORDINAT FOKUS SUATU PARABOLA



Grafik parabola memiliki satu diantara dua bentuk yang ditunjukkan dalam Gambar 6.3.5, tergantung apakah a positip atau a negatip. Dalam kedua kasus parabola tersebut simetri terhadap garis vertikal yang sejajar sumbu *Y*. Garis simetri ini memotong parabola pada suatu titik yang disebut *puncak* parabola. Puncak tersebut merupakan titik terendah (minimum) pada kurva jika $a > 0$ dan titik tertinggi (maksimum) jika $a < 0$. Koordinat-x dari puncak, atau disebut juga titik ekstrim. Parabola mempunyai Persamaan Sumbu Simetri diberikan oleh rumus:

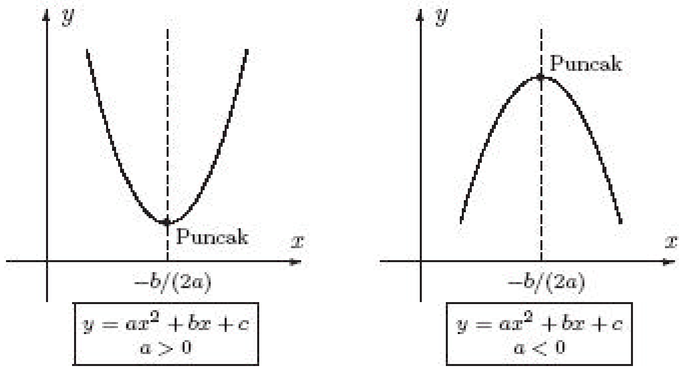
$$x = -\frac{b}{2a} \tag{6.3.4}$$

Puncak Parabola pastilah berada pada sumbu simetri, sehingga

koordinat puncak parabola : $(x, y) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ (6.3.5)

Fokus parabola : $p = -\frac{1}{4a}$ (6.3.6)

Dengan bantuan rumus ini, grafik yang cukup akurat dari suatu persamaan kuadratik dalam x dapat diperoleh dengan menggambarkan puncak dan titik potong dengan sumbu-sumbu koordinatnya atau dua titik pada tiap sisinya. Seringkali perpotongan parabola $f(x) = ax^2 + bx + c$ dengan sumbu-sumbu koordinat penting untuk diketahui. Perpotongannya dengan sumbu-*Y*, $y = c$, didapat langsung dengan memberikan $x = 0$. Untuk mendapatkan perpotongan-x, jika ada, haruslah diberikan $y = 0$ dan kemudian menyelesaikan persamaan kuadrat yang dihasilkan dari $ax^2 + bx + c = 0$



Gambar 6.3.5

Contoh 6.3.2

Gambarkan grafik parabola dan tandai puncak dan perpotongannya dengan sumbu-sumbu koordinat.

a) $y = x^2 - 3x - 4$

b) $y = -x^2 + x$

Penyelesaian :

a) Grafik fungsi $y = x^2 - 3x - 4$ mempunyai :

Sumbu Simetri : $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-(-3)}{2.1} = \dfrac{3}{2}$

Puncak di $(x, y) = (\dfrac{3}{2}, -\dfrac{(-3)^2 - 4.1.(-4)}{4.1}) = (\dfrac{3}{2}, -\dfrac{25}{4})$

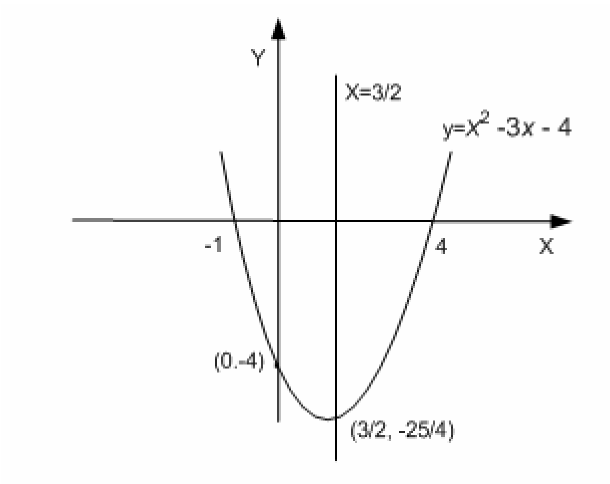
Titik potong dengan sumbu-sumbu koordinat:

Dengan sumbu Y : $x = 0 \Rightarrow y = -4$

Dengan sumbu X : $y = 0 \Rightarrow 0 = x^2 - 3x - 4$

Atau $0 = (x-4)(x+1)$

Jadi titik potong dengan sumbu X di $(4,0)$ dan (-1.0), dengan sumbu Y di $(0,-4)$



b) Grafik fungsi $y = -x^2 + x$ mempunyai :

Sumbu Simetri : $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1}{2(-1)} = \dfrac{1}{2}$

Puncak di $(x,y) = (\dfrac{1}{2}, -\dfrac{(1)^2 - 4.(-1).0}{4.(-1)}) = (\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4})$

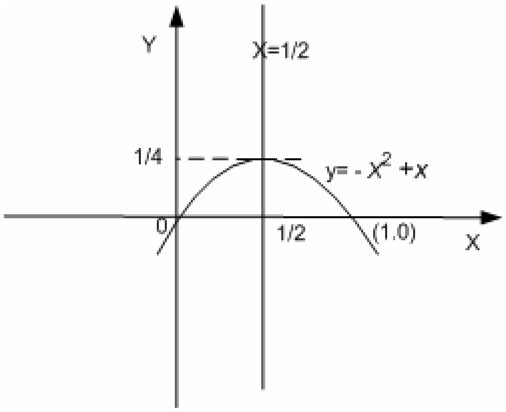
Titik potong dengan sumbu-sumbu koordinat:

Dengan sumbu Y : $x = 0 \Rightarrow y = 0$

Dengan sumbu X : $y = 0 \Rightarrow 0 = -x^2 + x$

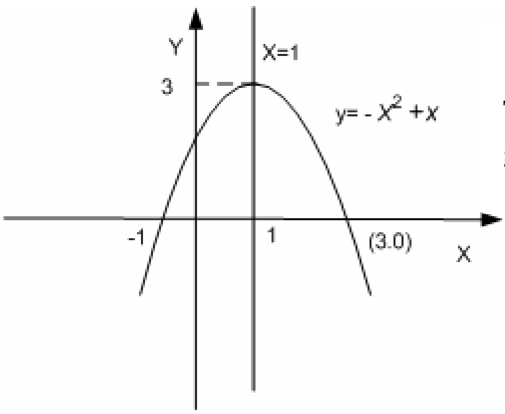
atau $x = 0, \quad x = 1$

Jadi titik potong dengan sumbu di $(0,0)$ dan (1.0)



Contoh 6.3.3

Diketahui kurva parabola pada gambar berikut :



Tentukanlah persamaan parabola gambar disamping.

Penyelesaian :

Parabola terbuka kebawah, tentulah koefisien dari x^2 bernilai negatip.

Dari sumbu simetri : x = 1, maka $1 = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow -2a = b$

$$y = ax^2 + bx + c = ax^2 + (-2a)x + c$$

Grafik melalui (1,3) maka $3 = a(1) + (-2a)(1) + c \Rightarrow c = 3 + a$

Jadi persamaannya menjadi : $y = ax^2 + (-2a)x + (3 + a)$

Grafik melalui (-1,0) , maka $0 = a + 2a + (3 + a)$

atau $a = \frac{-3}{4}$, selanjutnya diperoleh $b = \frac{3}{2}$, $c = \frac{9}{4}$.

Jadi persamaan parabola dari grafik yang diberikan tersebut adalah:

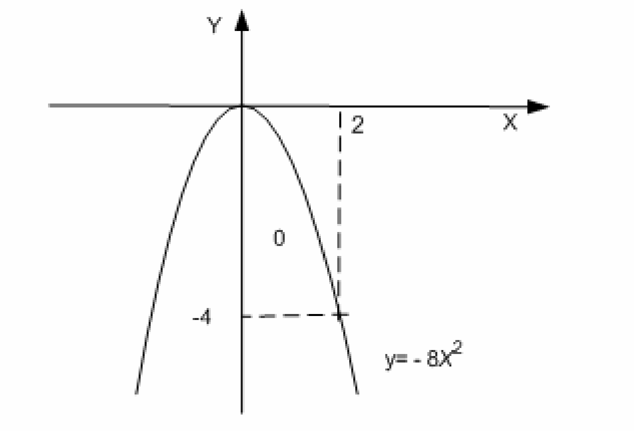
$$y = \frac{-3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} \text{ atau } 4y = -3x^2 + 6x + 9$$

Contoh 6.3.4

Tentukan persamaan parabola dan focus jika puncak paraboal di titik asal, yang melalui (-2,4) dan terbuka ke bawah. Gambarkanlah parabola tersebut.

Penyelesaian :

Bentuk persamaan parabola yang terbuka ke bawah dengan puncak di titik asal adalah : $x^2 = -4py$. Oleh karena parabola melalui (2,-4) maka $(2)^2 = -4p(-4)$, Atau p = 4. Jadi persamaan yang dicari adalah $x^2 = -16y$. Grafiknyasebagai berikut :



Contoh 6.3.5

Grafik dari gerakan Bola yang dilempar lurus ke atas dari permukaan bumi pada waktu t = 0 detik jika diberikan kecepatan awal 24,5 m/det jika gesekan udara diabaikan dapat ditunjukkan bahwa jarak s (dalam meter) dari bola itu ke tanah setelah t detik diberikan oleh persamaan parabola : $s = -4{,}9\,t^2 + 24{,}5\,\mathrm{t}$ (6.3.7)

a) Gambarkan grafik s terhadap t .

b) Berapakah tinggi maksimum bola tersebut.

Penyelesaian :

a) Persamaan (6.3.7) mempunyai bentuk (6.3.3) dengan :
a= -4,9 < 0 jadi parabola terbuka ke bawah , b = 24,5 dan c = 0.

Sumbu simetri : $t = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{24{,}5}{2\,.(-4{,}9)}$ = 2,5 det.

Dan akibatnya koordinat-s dari puncak parabola adalah :

$$(t,s) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right) = \left(2{,}5; -\frac{24{,}5^2-4(-4{,}9)(0)}{4(-4{,}9)}\right)$$

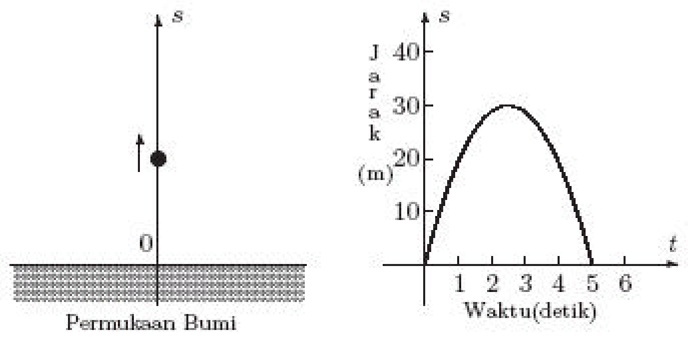
atau $(t,s) = (2{,}5\ ;\ 30{,}625)$

Koordinat titik potong dengan sumbu t jiak $s = 0$:

$0 = -4{,}9\,t^2 + 24{,}5\,\mathrm{t}$ atau $0 = 4{,}9\ t\ (5-t)$ diperoleh: $t = 0$ atau $t = 5$.

Dari informasi puncak dan perpotongan dengan sumbu koordinat diperoleh grafik parabola Gambar 6.3.6.

b) Oleh karena puncak di $(t,s) = (2{,}5\ ;\ 30{,}625)$, maka tinggi maksimum lemparan bola adalah $s \cong 30{,}6$



(Gambar 6.3.6)

Sebuah sifat geometri sederhana dari parabola dijadikan dasar penggunaan dalam ilmu teknik. Menurut prinsip ilmu fisika, cahaya yang datang ke permukaan yang mengkilap, maka sudut datang sama dengan sudut pantul. Sifat parabola dan prinsip fisika ini dipakai untuk membuat lampu sorot dimana sumber cahaya lampu diletakkan pada fokus. Sebaliknya sifat ini digunakan pula dalam teleskop tertentu dimana cahaya masuk yang semua sejajar dan datang dari bintang di fokuskan pada suatu titik yaitu fokus parabola.

Contoh 6.3.6

Buatlah sketsa grafik dari fungsi

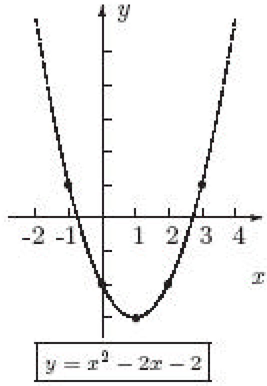
(a). $y = x^2 - 2x - 2$ (b). $y = -x^2 + 4x - 5$

Penyelesaian :

a). Persamaan $y = x^2 - 2x - 2$ merupakan persamaan kuadrat dengan a = 1, b = -2, dan c = -2, sehingga sumbu simetri atau koordinat-x dari puncaknya adalah: $x = -\frac{b}{2a} = 1$

Menggunakan nilai ini dan dua nilai pada tiap sisi (lihat tabel), diperoleh hasil grafik fungsi pada Gambar 6.3.7.

x	$y = x^2 - 2x - 2$
-1	1
0	-2
1	-3
2	-2
3	1



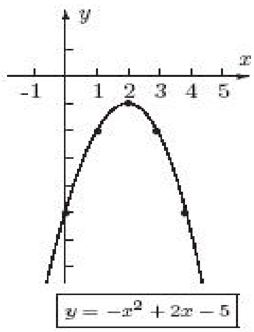
Gambar 6.3.7

b) Persamaan $y = -x^2 + 4x - 5$ merupakan persamaan kuadrat dengan a = -1, b = 2, dan c = -2, sehingga dengan koordinat-x dari puncaknya adalah

$$x = -\frac{b}{2a} = 2$$

Menggunakan nilai ini dan dua nilai pada tiap sisi (lihat tabel), diperoleh hasil grafik fungsi pada Gambar 6.3.8.

x	$y = -x^2 + 4x - 5$
0	-5
1	-2
2	-1
3	-2
4	-5



Gambar 6.3.8 Grafik fungsi $y = -x^2 + 4x - 5$

Latihan 6-3

Gambarkan grafik parabola dan tandai koordinat puncak (ekstrim) dan perpotongannya dengan sumbu-sumbu koordinat. Tentukan jenis titik puncak, apakah titik minimum atau maksimum untuk soal no:1 s/d no: 12

1. $y = x^2 + 2$	7. $y = (x-2)^2$
2. $y = x^2 - 3$	8. $y = (3+x)^2$
3. $y = x^2 + 2x - 3$	9. $x^2 - 2x + y = 0$
6. $y = x^2 - 3x - 4$	10. $x^2 + 8x + 8y = 0$
7. $y = -x^2 + 4x + 5$	11. $y = 3x^2 - 2x + 1$
8. $y = -x^2 + x$	12. $y = x^2 + x + 2$

13. Tentukan nilai a jika harus memenuhi syarat yang diharuskan:

    (a). $g(x) = 2x^2 - (a+2)x - 3$, grafik mempunyai sumbu simetri di $x = -1$

    (b). $h(x) = -x^2 - 3x + 5a - 1$, grafik mempunyai titik balik di $(-\frac{1}{6}, 1)$

14. Bola yang dilempar lurus ke atas dari permukaan bumi pada waktu t = 0 detik jika diberikan kecepatan awal 32 m/det jika gesekan udara diabaikan diberikan oleh persamaan parabola : $s = 32t - 16t^2$

    a) Gambarkan grafik s terhadap t .

    b) Berapakah tinggi maksimum bola tersebut.

6.4 APLIKASI UNTUK EKONOMI

Tiga fungsi yang penting dalam ekonomi adalah :

C(x) =Total biaya produksi x unit produk selama periode waktu tertentu

R(x) =Total hasil penjualan x unit produk selama periode waktu tertentu.

P(x) = Total keuntungan penjualan x unit produk selama periode waktu tertentu.

Fungsi-fungsi itu secara berturut-turut disebut *fungsi biaya*, *fungsi pendapatan* dan *fungsi keuntungan*. Jika semua produk terjual, hubungan fungsi-fungsi itu adalah :

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

[Keuntungan] = [Pendapatan] – [biaya]

Total biaya C(x) untuk produksi x unit dapat dinyatakan sebagai penjumlahan :

$$C(x) = a + M(x) \quad (6.4.1)$$

Dengan a konstanta, disebut ***overhead*** dan M(x) adalah ***fungsi biaya pembuatan***. **O**verhead, merupakan biaya tetap tetapi tidak tergantung pada x, pelaku ekonomi harus membayar tetap jika tidak ada produksi, misalnya biaya sewa dan asuransi. Disisi lain biaya pembuatan M(x) tergantung pada jumlah item pembuatan, contoh biaya material dan buruh. Ini menunjukkan bahwa dalam ilmu ekonomi penyederhanaan asumsi yang tepat M(x) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$M(x) = bx + cx^2$$

Dengan b dan c konstanta. Subtitisi pada (6.4.1) menghasilkan :

$$C(x) = a + bx + cx^2 \quad (6.4.2)$$

Jika perusahaan perakitan dapat menjual semua item-item produksi denga p rupiah per biji, maka total pendapatan R(x) menjadi

$$R(x) = px$$

Dan total keuntungan :

$$P(x) = [\text{total pendapatan}] - [\text{total biaya}]$$

$$P(x) = R(x) - R(x)$$

$$P(x) = px - C(x)$$

Jadi, jika fungsi biaya diberikan pada (6.4.2), maka

$$P(x) = px - (a + bx + cx^2) \qquad (6.4.3)$$

Tergantung pada faktor-faktor seperti jumlah pekerja, jumlah mesin yang tersedia, kondisi ekonomi dan persaingan, batas atas l pada jumlah item-item yang sanggup diproduksi dan dijual. Jadi selama periode waktu tetap peubah x pada (6.4.3) akan memenuhi :

$$0 \leq x \leq l$$

Persamaan (6.4.3) merupakan suatu persamaan kuadrat dalam x, yang mana nilai optimum dapat ditentukan , yaitu nilai fungsi pada sumbu simetri. Dengan menentukan nilai-nilai x pada $[0,l]$ yang memaksimumkan (6.4.3) perusahaan dapat menentukan berapa banyak unit produksi harus dibuat dan dijual agar menghasilkan keuntungan terbesar. Masala ini diilustrasikan dalam contoh berikut:

Contoh 6.4.1

Pinicilin berbentuk cair dibuat oleh suatu perusahaan farmasi dan dijual borongan dengan harga Rp 2 000 per unit. Jika total biaya produksi untuk x unit adalah:

$$C(x) = 5\,000\,000 + 800\,x + 0{,}003\,x^2$$

Dan jika kapasitas produksi terbesar dari perusahaan 300 000 unit dalam waktu tertentu. Berapa banyak unit-unit pinicilin harus dibuat dan dijual agar memperoleh keuntungan maksimum ?

Penyelesaian:

Karena total penghailan untuk penjualan x unit adalah R(x) = 2 000 x , keuntungan P(x) pada x unit menjadi :

$$P(x) = R(x) + C(x) = 2\,000\,x - (5\,000\,000 + 800\,x + 0{,}003\,x^2)$$

$$P(x) = -0{,}003\,x^2 + 1\,200\,x - 5\,000\,000$$

Dan karena kapasitas produksi terbesar adalah 300 000 unit, berarti x harus terdapat pada selang [0 , 300 000]. Sumbu simetri dari fungsi keuntungan :

$$x = -\frac{1200}{2(-0{,}003)} = 200.000$$

Oleh karena titik $x = 200.000$ berada dalam selang [0 , 300 000] maka keuntungan maksimum harus terjadi pada titik balik/puncak kurva parabola yaitu di $x = 200.000$ dengan koordinat puncak parabola ::

$$(x, P(x)) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a})$$

$$= (\ 200\,000\ ; -\frac{(1.200)^2 - 4(-0{,}003)(-5.000.000)}{4(-0{,}003)})$$

$$= (\ 200\,000\ ; -\frac{(144.10^4 - 6.10^4)}{-12.10^{-3}})$$

$$= (200.000; \frac{138.10^4}{12.10^{-3}})$$

$$= (200.000; 115.10^7\ )$$

Jadi keuntungan maksimum P(x) = Rp 1,15.10 ^{9} terjadi pada x=200.000 unit diproduksi dan dijual dalam waktu tertentu.

Latihan 6-4

1. Perusahaan Kimia menjual asam sulfur secara borongan dengan harga 100 / unit. Jika total biaya produksi harian dalam ribuan rupiah untuk x unit adalah

   $C(x) = 100.000 + 50\,x + 0{,}0025\,x^2$

   Dan jika kapasitas produksi terbesar dari perusahaan 7 000 unit dalam waktu tertentu.

   a) Berapa banyak unit-unit asam sulfur harus dibuat dan dijual agar memperoleh keuntungan maksimum ?.

   b) Apakah akan menguntungkan perusahaan apabila kapasitas produksi perusahaan ditambah?

2. Perusahaan menentukan bahwa x unit produksi dapat dijual harian pada harga p rupiah per unit, dimana :

   $x = 1000 - p$

   Biaya produksi harian untuk x unit adalah : $C(x) = 3.000 + 20\,x$

   (a) Tentukan fungsi penghasilan $R(x)$.

   (b) Tentukan ungsi keuntungan $P(x)$

   (c) Asumsikan bahwa kapasitas produksi paling banyak 500 unit/hari, tentukan berapa banyak unit yang harus diproduksi dan dijual setiap hari agar keuntungan maksimum.

   (d) Tentukan keuntungan maksimum.

   (e) Berapa garga per unit harus ditentikan untuk memperoleh keuntungan maksimum.

3. Pada proses pembuatan kimia tertentu tiap hari berat y dari kerusakan keluaran kimia yang larut bergantung pada total berat x dari semua keluaran yang didekati dengan rumus :

$$y(x) = 0{,}01\, x + 0{,}00003\, x^2$$

dengan x dan y dalam kg. Jika keuntungan Rp 1 juta per kg dari kimia yang tidak rusak dan rugi Rp 200.000 per kg dari produksi kimia yang rusak, berapa kg seharusnya produk kimia diproduksi tiap hari agar keuntungan maksimum.

4. Suatu perusahaan menyatakan bahwa keuntungan yang diperoleh bergantung pada jumlah pemakaian uang untuk pemasangan iklan, Berdasarkan survey jika perusahaan menggunakan x rupiah untuk iklan maka keuntungan yang diperoleh adalah

$$P(x) = -\frac{x^2}{100} + \frac{x}{50} + 100$$

Tentukan jumlah uang yang harus dipakai untuk pemasangan iklan agar mendapatkan keuntungan sebesar-besarnya.

5. Sebidang lahan ingin dipagari dengan syarat kelilingnya adalah 100 meter. Dengan demikian luas persegi panjang dengan keliling tersebut dapat dinyatakan dalam L (m^2) adalah :

$$L = x(50 - x)$$

a) Tentukan Domain dari fungsi luasan tersebut.

b) Tentukan luas terbesar yang dapat dibuat oleh kawat tersebut.

Bab

7

BARISAN DAN DERET

7. Barisan dan Deret

Materi tentang barisan dan deret sudah diajarkan di SMP, pada tingkat SMK akan diulang dan dipelajari lebih mendalam. Barisan dan deret sangat berguna dalam berbagai bidang termasuk bidang bisnis dan administrasi seperti perhitungan bunga majemuk, menghitung pertumbuhan penduduk, untuk menganalisa data dan sebagainya

7.1 BARISAN DAN DERET BILANGAN

Sebelum diuraikan materi tentang pola bilangan, barisan dan deret bilangan real terlebih dahulu akan dijelaskan pengertian tentang notasi sigma

7.1.1 NOTASI SIGMA

Untuk menggambarkan cara kerja notasi sigma , perhatikan jumlahan berikut :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$$

Jumlahan diatas, setiap sukunya berbentuk n^3, dengan memasukkan nilai bilangan bulat n secara berurut dari n = 1 sampai n = 5. Dalam notasi sigma jumlahan tersebut dapat dinyatakan $\sum_{n=1}^{5} n^3$. Jadi

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = \sum_{n=1}^{5} n^3$$

Dari gambaran diatas, notasi sigma dapat didefinisikan sebagai berikut :

DEFINISI 7.1.1

Misalkan f fungsi pada bilangan bulat , serta a dan b bilangan bulat dimana a $\leq$ b maka

$$\sum_{n=a}^{b} f(n)$$

Menyatakan jumlah dari suku – suku yang dapat dihasilkan apabila disubstitusikan bilangan bulan n secara berurut diawali dari n = a dan diakhiri n = b

Jadi

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \ldots + f(b)$$

Contoh 7.1.1

Nyatakan notasi sigma berikut dalam bentuk penjumlahan beruntun :

a. $\sum_{n=2}^{7} 2n$

b. $\sum_{k=1}^{8} k^2$

c. $\sum_{m=3}^{10} (3m - 1)$

Penyelesaian

a. $\sum_{n=2}^{7} 2n = 2.2 + 2.3 + 2.4 + 2.5 + 2.6 + 2.7$

$= 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14$

b. $\sum_{k=1}^{8} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2$

c. $\sum_{m=3}^{10} (3m - 1) = (3.3\text{-}1) + (3.4\text{-}1) + (3.5\text{-}1) + (3.6\text{-}1) + (3.7\text{-}1) +$

$+ (3.8\text{-}1) + (3.9\text{-}1) + (3.10\text{-}1)$

$= 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 + 26 + 29$

Sekarang bagaimana kalau dari penjumlahan beruntun dinyatakan dalam notasi sigma ? Hal ini ditunjukkan dalam contoh berikut ini

CONTOH 7.1.2 :

Nyatakan penjumlahan berikut dalam notasi sigma

a. 4 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24 + 28

b. 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + … + 39

c. 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64

d. 4 + 9 + 16 + 25 +… + 100^2

e. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$

Penyelesaian

Untuk menyelesaikan soal diatas perhatikan pola dari bilangan yang dijumlahkan

a. 4 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24 + 28 = 4.1 +4.2 +4.3 +4.4 +4.5 +4.6 +4.7

$$= \sum_{n=1}^{7} 4n$$

b. 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + … + 39 = (2.1-1) +(2.2-1) +(2.3-1) +

$$+ (2.4\text{-}1) +(2.5\text{-}1) + (2.6\text{-}1) + \dots + (2.20\text{-}1) = \sum_{n=1}^{20} (2n - 1)$$

c. $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = \sum_{n=1}^{6} 2^n$

d. $4 + 9 + 16 + 25 + \dots + 100^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + 100^2 = \sum_{n=1}^{100} n^2$

e. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = \sum_{n=1}^{6} a_n$

SIFAT – SIFAT NOTASI SIGMA

Dari pengertian notasi sigma diatas, maka $\sum_{n=1}^{k} a_n$ dan $\sum_{n=1}^{k} b_n$

menyatakan $\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_k$

dan $\sum_{n=1}^{k} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_k$

Notasi sigma tersebut mempunyai sifat – sifat sebagai berikut :

1. Jika C suatu konstanta maka $\sum_{n=1}^{k} C = \underbrace{C + C + C + \ldots + C}_{k\ buah} = k\,C$

2. $\sum_{n=1}^{k} C\,a_n = C \sum_{n=1}^{k} a_n$

3. $\sum_{n=1}^{k} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{k} a_n + \sum_{n=1}^{k} b_n$

4. $\sum_{n=1}^{k} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{k} a_n - \sum_{n=1}^{k} b_n$

7.1.2 POLA BILANGAN

Berikut ini akan diberikan beberapa macam pola bilangan

■ POLA BILANGAN GANJIL DAN POLA BILANGAN GENAP

Kalau kita perhatikan penomoran rumah, sering kita lihat bahwa nomor rumah disebelah kiri jalan bernomor 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13,…sedangkan disebelah kanan jalan bernomor 2,4,6,8,10,12,…sehingga ketika kita mencari rumah bernomor 20 maka kita tinggal mencari rumah yang berada disebelah kanan jalan. Penomoran rumah disebelah kiri jalan yaitu 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13,…menggunakan pola bilangan ganjil sedangkan penomoran rumah disebelah kanan jalan yaitu 2,4,6,8,10,12,… menggunakan pola bilangan genap

■ POLA BILANGAN PERSEGI

Sekarang kita perhatikan gambar berikut ini :

$\oplus$

$\oplus$ $\oplus$
$\oplus$ $\oplus$

$\oplus$ $\oplus$ $\oplus$
$\oplus$ $\oplus$ $\oplus$
$\oplus$ $\oplus$ $\oplus$

$\oplus$ $\oplus$ $\oplus$ $\oplus$
$\oplus$ $\oplus$ $\oplus$ $\oplus$
$\oplus$ $\oplus$ $\oplus$ $\oplus$
$\oplus$ $\oplus$ $\oplus$ $\oplus$

Dari melihat gambar diatas, pasti kita bisa membuat gambar berikutnya. Hal ini dikarenakan kita mengetahui pola dari gambar diatas. Kalau kita perhatikan, jumlah lingkaran diatas adalah 1, 2^2, 3^2, 4^2,….Pola bilangan diatas disebut pola bilangan persegi

- **POLA BILANGAN SEGITIGA PASCAL**

Perhatikan susunan bilangan yang berbentuk segitiga berikut ini :

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Setelah memperhatikan bilangan diatas, kita bisa menentukan bilangan pada baris ke 7 yaitu 1 6 15 20 15 6 1. Hal ini dikarenakan kita mengetahui pola bilangan pada baris tersebut. Pola bilangan diatas disebut pola bilangan segitiga Pascal.

Dari uraian beberapa contoh pola bilangan diatas,dalam kehidupan sehari – hari saudara pasti sering menemui suatu kejadian yang ada kaitannya dengan pola bilangan. Silahkan saudara cari contoh pola bilangan yang lain

7.1.3 BARISAN

Dalam bahasa sehari-hari, istilah ’barisan’ digunakan untuk menjelaskan suatu obyek berurut atau kejadian yang diberikan dalam urutan tertentu. Secara informal, istilah barisan dalam matematika digunakan untuk menggambarkan suatu keterurutan / pola yang tak berhingga dari bilangan. Perhatikan bilangan - bilangan berikut ini

a. 1, 2, 3 , 4, 5, 6

b. 1, -1, 1, -1, 1

c. 2, 4, 6, 8, 10

Dari bilangan – bilangan diatas kita dapat melihat pola bilangan dari barisan tersebut sehingga dapat meneruskan bilangan selanjutnya yaitu

a. 7, 8, 9, 10,11,…

b. -1, 1, -1, 1,-1,…

c. 12, 14, 16, 18, …

Dari gambaran diatas dapat didefinisikan barisan sebagai berikut

DEFINISI 7.1.2

Barisan bilangan adalah Untaian suatu bilangan yang mempunyai suatu pola atau urutan tertentu

CONTOH 7.1.3

a. 1, 3, 5, 7, 9, … (biasa disebut barisan bilangan ganjil)

b. 2, 4, 6, 8, 10, …(biasa disebut barisan bilangan genap)

c. 1. 4, 9, 16,25,…(biasa disebut barisan bilangan kuadrat)

d. 1,5,9,13,17,21,25,…(barisan bilangan dimana bilangan berikutnya ditambah 4)

Bilangan-bilangan dalam suatu barisan disebut **suku** dari barisan. Suku-suku ini bisa digambarkan menurut posisi-posisi dimana mereka berada. Bilangan pada posisi pertama, posisi kedua, posisi ketiga dan seterusnya dari suatu barisan disebut *suku pertama*, *suku, kedua* , *suku ketiga* dan seterusnya dan dinotasikan U_1, U_2, $U_{3,..}$. Jadi U_n melambangkan suku ke n yaitu bilangan pada posisi ke n dari suatu barisan. Karena suatu barisan kontinu secara tak berhingga, maka tidak ada suku terakhir.

Cara yang paling umum untuk menentukan suatu barisan adalah memberikan suatu rumus yang menghubungkan antara suku-suku dengan nomor suku-sukunya. Sebagai contoh, dalam barisan

2, 4, 6, 8,10…

setiap suku adalah dua kali nomor suku tersebut, sehingga suku ke-n dalam barisan adalah Un = 2n . Hal ini didefinisikan dengan menulis barisan sebagai berikut :

2, 4, 6, 8,10…,2n,…

atau lebih singkat barisan tersebut dinotasikan : {2n }

yang berarti bahwa barisan dapat dihasilkan dengan cara mensubstitusikan secara berturut turut nilai-nilai bilangan bulat n = 1, 2, 3, 4,…kedalam rumus 2n

CONTOH 7.1.4:

Tentukan 4 suku pertama dari barisan – barisan berikut ini

a. { 3n + 1 }

b { $2n^2$ +3 }

c. { $\frac{1}{n}$ }

Penyelesaian :

a. U_n = 3n + 1

U_1 = 3.1 + 1 = 4

U_2 = 3.2 + 1 = 7

U_3 = 3.3 + 1 = 10

U_4 = 3.4 + 1 = 13

Jadi 4 suku pertama dari barisan { 3n + 1 } adalah 4, 7, 10, 13

b. $U_n = 2n^2 + 3$

$U_1 = 2.\ 1^2 + 3 = 5$

$U_2 = 2.\ 2^2 + 3 = 11$

$U_3 = 2.\ 3^2 + 3 = 21$

$U_4 = 2.\ 4^2 + 3 = 35$

Jadi 4 suku pertama dari barisan$\{\ 2n^2 + 3\ \}$ adalah 5, 11, 21,35

c. $U_n = \dfrac{1}{n}$

$U_1 = 1$

$U_2 = \dfrac{1}{2}$

$U_3 = \dfrac{1}{3}$

$U_4 = \dfrac{1}{4}$

Jadi 4 suku pertama dari barisan $\{\ \dfrac{1}{n}\}$ adalah 1, $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}$

CONTOH 7.1.5:

Tentukan rumus suku ke n dari barisan berikut

a. 1, 3, 5, 7, 9, 11,…

b. 2, -2, 2,-2,2,-2,…

c. 1, 0, 1, 0,1 ,0,…

Penyelesaian :

a. Barisan 1, 3, 5, 7, 9, 11,… dapat dinyatakan dalam bentuk 2.1-1 , 2.2-1, 2.3-1, 2.4-1,2.5-1,2.6-1,…sehingga Un = 2n-1

b. Ingat $(-1)^{genap} = 1$ dan $(-1)^{ganjil} = -1$

Barisan 2, -2, 2,-2,2,-2,… dapat dinyatakan dalam bentuk $2\,(-1)^{1+1}$, $2\,(-1)^{2+1}$,$2\,(-1)^{3+1}$, $2\,(-1)^{4+1}$, $2\,(-1)^{5+1}$, $2\,(-1)^{6+1}$,… sehingga $U_n = 2\,(-1)^{n+1}$

c. Barisan 1, 0, 1, 0,1 ,0,… terlihat bahwa $U_1 = U_3 = U_5 = 1$ dan $U_2 = U_4 = U_6 = 0$ sehingga jika n ganjil maka $U_n = 1$ sedangkan jika n genap maka $U_n = 0$

7.1.4 DERET

Pada subbab sebelumnya telah dibahas tentang suatu barisan. Sekarang akan dibahas tentang deret yaitu jumlahan berurut dari suku- suku suatu barisan

DEFINISI 7.1.3

Misalkan $U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_{6},\ldots$ merupakan barisan bilangan maka deret adalah jumlahan berurut dari suku-suku barisan.

Deret tak hingga adalah jumlahan berurut tak hingga dari suku – suku barisan dan dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + \ldots$$

Sedangkan Deret berhingga adalah jumlahan berurut berhingga dari suku – suku barisan.

Misal jumlah n suku pertama dari suku-suku barisan biasa dinotasikan S_n yaitu

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + \ldots + U_n$$

Atau $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$

CONTOH 7.1.6 :

Diberikan barisan 2, 4, 6, 8, 10, 12, …

a. Tentukan jumlah 5 suku pertama dari barisan tersebut

b. Tentukan jumlah 8 suku pertama dari barisan tersebut

Penyelesaian :

a. jumlah 5 suku pertama dari barisan tersebut dinotasikan S_5 yaitu

$$S_5 = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5$$
$$= 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$$

b. jumlah 8 suku pertama dari barisan tersebut dinotasikan S_8 yaitu

$$S_8 = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_{47} + U_8$$
$$= 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 = 72$$

CONTOH 9.1.7 :

Diberikan barisan 2, 4, 6, 8, 10, 12, …

Nyatakan deret berikut dalam notasi sigma

a. 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + …

b. 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12

c 2 + 4 + 6 + 8

d. 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18

Penyelesaian :

Sebelum menentukan notasi sigmanya, terlebih dahulu kita menentukan rumus suku ke n. Terlihat bahwa rumus suku ke n dari barisan 2, 4, 6, 8, 10, 12, … adalah Un = 2n

a. $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} 2n$

b. 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 merupakan jumlahan dari 6 suku pertama sehingga $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = \sum_{n=1}^{6} 2n$

c. 2 + 4 + 6 + 8 merupakan jumlahan dari 4 suku pertama sehingga

$2 + 4 + 6 + 8 = \sum_{n=1}^{4} 2n$

d. 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 merupakan jumlahan dari 9 suku pertama sehingga $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 = \sum_{n=1}^{9} 2n$

SOAL LATIHAN 9.1

1. Tuliskan notasi sigma berikut dalam bentuk penjumlahan beruntun

a. $\sum_{k=1}^{5} (5k - 3)$

b. $\sum_{n=-2}^{5} (3n + 5)$

c. $\sum_{n=1}^{8} n^2$

d. $\sum_{n=3}^{10} \frac{1}{n - 20}$

e $\sum_{k=-1}^{7} \frac{3k}{2k - 5}$

f. $\sum_{n=1}^{4} (n^3 - 3n)$

g. $\sum_{n=5}^{12} (n^2 - 3n + 1)$

h. $\sum_{j=4}^{11} \sqrt{j + 2}$

i. $\sum_{i=2}^{9} 3^{i-2}$

j. $\sum_{t=1}^{7} (t - 1)^2$

2. Hitunglah

a. $\sum_{n=1}^{8} n$

b. $\sum_{n=4}^{9} (3n-4)$

c. $\sum_{k=2}^{5} (2k+1)$

d. $\sum_{i=1}^{20} 4$

e. $\sum_{t=11}^{40} \pi$

f. $\sum_{i=1}^{6} i^2 - 2$

g. $\sum_{n=-1}^{4} (3^n - 2)$

h. $\sum_{t=1}^{6} (t^2 + 2t)$

i. $\sum_{t=1}^{4} (-t)^t$

j. $\sum_{n=1}^{100} (-1)^n$

3. Nyatakan penjumlahan berikut dalam notasi sigma

a. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$

b. $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + \ldots + 20$

c. $2 - 4 + 6 - 8 + 10 - 12 + \ldots + 22$

d. $-2 + 4 - 6 + 8 - 10 + 12 + \ldots - 42$

e. $a + 3a + 5a + 7a + 9a + 11a$

f. $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{50}$

g. $8^1 + 8^2 + 8^3 + 8^4 + 8^5 + \ldots + 8^k$

h. $-k + k^2 - k^3 + \ldots + k^{50}$

i. $b_o + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + b_4 y^4 + b_5 y^5 + b_6 y^6 + b_7 y^7$

j. $a^5 x + a^4 x^2 + a^3 x^3 + a^2 x^4 + a x^5$

4. Jika $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Maka hitunglah

a. $\sum_{k=1}^{50} k$

b. $\sum_{k=5}^{50} k$

c. $\sum_{k=1}^{100} (8k + 2)$

d. $\sum_{k=3}^{80} (2k - 1)$

e. $\sum_{k=1}^{30} k^2$

f. $\sum_{k=4}^{30} k^2$

g. $\sum_{k=1}^{20} (k + 1)^2$

h. $\sum_{k=1}^{15} (k^2 - 2k)$

i. $\sum_{k=1}^{20} (k^3 - 3)$

j. $\sum_{k=3}^{10} (2k^3 - k^2 + 3k)$

5. Tunjukkan bahwa

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \ldots + \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Petunjuk : $\dfrac{1}{n.(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

6. Tentukan 8 suku pertama dari barisan – barisan berikut ini :

a. { 4n }

b. { $3^n + 1$ }

c. { $n^2 + n$)

d { $\dfrac{n-2}{n+2}$ }

e. { 2n - $\dfrac{1}{n}$ }

f. { $7^{2n+1} - 3n$ }

g. { $(3n - 5)^2$ }

7. Tentukan rumus suku ke n dari barisan - barisan berikut ini ;

a. $5^1, 5^2, 5^3, 5^4, \ldots$

b. $2^4, 2^8, 2^{12}, 2^{16}, \ldots$

c. -2, 1, -2, 1, -2, 1,…

d. 6, 10, 16, 20, 26, 30,…

e. 5, 15, 25, 35, 45,55,…

f. 10, 100,1000,10.000,…

g. $\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{7}, \dfrac{4}{9}, \dfrac{5}{11}, \ldots$

8. Dari soal 7, tentukan jumlah 7suku pertama pada barisan tersebut

9. Diberikan barisan 2, 5, 10,17, 26, 37, 50, 82,…

Nyatakan soal berikut dalam notasi sigma

a. Jumlah 5 suku pertama

b. Jumlah 9 suku pertama

c. 2 + 5 + 10 + 17

d. 2 + 5 + 10 + 17 + 26 + 37 + 50

e. 2 + 5 + 10 + 17 + …

7.2 BARISAN DAN DERET ARITMATIKA

Perhatikan barisan – barisan berikut ini :

a. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,8,…

b. 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14,…

c. 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20,…

d. 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, …

Kalau kita perhatikan barisan – barisan diatas memiliki beda (selisih) antara dua suku berurutan tetap yaitu

a. barisan 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,8,… memiliki beda (selisih) antara dua suku berurutan tetap yaitu 1

b. barisan 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14,… memiliki beda (selisih) antara dua suku berurutan tetap yaitu 2

c. barisan 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20,… memiliki beda (selisih) antara dua suku berurutan tetap yaitu 3

d. barisan 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, …memiliki beda (selisih) antara dua suku berurutan tetap yaitu 10

Contoh – contoh barisan diatas biasa disebut barisan aritmatika

DEFINISI 7.2.1**:**

Barisan aritmatika adalah suatu barisan yang memiliki beda (selisih) antara dua suku berurutan tetap.

Berdasarkan definisi tersebut,bentuk umum dari barisan aritmatika adalah:

$$a \,,\, (a+b) \,,\, (a+2b) \,,\, (a+3b) \,,\, (a+4b) \,,\, \ldots\ldots\ldots\ldots,\, (a+(n-1)b)$$

dimana $a = U_1$ adalah suku pertama

b disebut beda (selisih) antara dua dua suku berurutan yaitu

$b = U_n – U_{n-1}$

Kalau kita perhatikan definisi dari barisan aritmatika di atas maka

Suku ke-1 = U_1 = a

Suku ke-2 = U_2 = a + b

Suku ke-3 = U_2 = a +2 b

Suku ke-4 = U_2 = a + 3 b

Suku ke-5 = U_2 = a + 4 b

Dan seterusnya, sehingga rumus suku ke-n dari barisan aritmatika adalah

$$Un = a + (n-1)\ b$$

CONTOH 7.2.1:

Tentukan rumus suku ke-n pada barisan aritmatika berikut ini :

a. 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20,…
b. 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, …
c. 100, 99, 98, 97, 96, 95, 94,…

Penyelesaian :

a. a = U_1 = 2

   b = 5 -2 = 3

   Un = a + (n-1) b

   = 2 + (n-1) 3

   = 3n -1

   Jadi rumus suku ke-n pada barisan aritmatika 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20,… adalah Un = 3n -1

b. $a = U_1 = 10$

$b = 20 – 10 = 10$

$Un = a + (n-1)\, b$

$= 10 + (n-1)\, 10$

$= 10\, n$

Jadi rumus suku ke-n pada barisan aritmatika 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, … adalah Un = 3n -1

c. $a = U_1 = 100$

$b = 99-100 = -1$

$Un = a + (n-1)\, b$

$= 100 + (n-1)\, (-1)$

$= -n + 101$

Jadi rumus suku ke-n pada barisan aritmatika 100, 99, 98, 97, 96, 95, 94,…adalah Un = -n + 101

CONTOH 7.2.2 :

Tentukan suku ke – 5, suku ke – 15 dan suku ke-50 dari barisan aritmatika 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40,…

Penyelesaian :

Untuk mengerjakan soal diatas terlebih dahulu kita mencari rumus suku ke -n

$a = U_1 = 5$

$b = 10-5 = 5$

$Un = a + (n-1)\, b$

$= 5 + (n-1)\, 5$

$= 5\, n$

$U_5 = 5. 5 = 25$

$U_{15} = 5 . 15 = 75$

$U_{50} = 5 .50 = 250$

Selanjutnya akan diberikan pengertian tentang deret dari suatu barisan aritmatika

DEFINISI 7.2.2 :

Deret aritmatika adalah jumlah dari suku-suku barisan aritmatika. Jika Sn adalah jumlah n suku pertama dari suku-suku barisan aritmatika , maka $S_1 = U_1 = a$

$S_2 = U_1 + U_2 = a + (a + b)$

$S_3 = U_1 + U_2 + U_3 = a + (a + b) + (a + 2 b)$

.
.
.

$Sn = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \ldots + U_n = a + (a + b) + (a +2 b) + (a +3 b) + \ldots + (a + (n-1)b)$

Dari definisi diatas maka jumlah n suku pertama dari suku-suku barisan aritmatika diatas dapat disederhanakan menjadi

$$
\begin{aligned}
Sn &= n a + (0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)) b \\
&= n a + (0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n) b - n b \\
&= n a + (1 + 2 + 3 + \ldots +n) b - n b \\
&= n a + (\frac{1}{2} n (n + 1)) b - n b \\
&= n a + \frac{1}{2} n^2 b - \frac{1}{2} n b
\end{aligned}
$$

$$Sn = n\,a + \frac{1}{2}\,n\,(n-1)\,b$$

$$= \frac{1}{2}\,n\,(2a + (n\text{-}1)\,b)$$

Sedangkan $U_1 + U_n = a + (a + (n\text{-}1)\,b) = 2a + (n\text{-}1)\,b$ sehingga Sn juga dapat dinyatakan dalam bentuk $Sn = \frac{1}{2}\,n\,(U_1 + U_n)$

Jadi, Jumlah n suku pertama dari suku-suku barisan aritmatika dapat ditentukan dengan rumus

$$Sn = \frac{1}{2}\,n\,(2a + (n\text{-}1)\,b)$$

Atau

$$Sn = \frac{1}{2}\,n\,(U_1 + U_n)$$

CONTOH 7.2.3 :

Hitunglah jumlah 20 suku pertama deret aritmatika :

$$2 + 5 + 8 + 11 + 14 + \ldots$$

Penyelelesaian :

$a = U_1 = 2$ dan $b = 5$

$$Sn = \frac{1}{2}\,n\,(2a + (n\text{-}1)\,b)$$

$$S_{20} = \frac{1}{2}\,.20\,(2.2 + (20\text{-}1)\,5)$$

$$= 10.\,99$$

$$= 990$$

Jadi jumlah 20 suku pertama deret tersebut adalah 990

CONTOH 7.2.4

Diberikan barisan aritmatika 3, 7, 11, 15, 19, 23,…

Tentukan $U_6 + U_7 + U_8 + U_9 + U_{10} + U_{11}$

Penyelesaian :

$a = U_1 = 3$

$b = 4$

$S_{11} = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_7 + U_8 + U_9 + U_{10} + U_{11}$

$S_5 = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5$

Jadi $U_6 + U_7 + U_8 + U_9 + U_{10} + U_{11} = S_{11} - S_5 = \frac{1}{2}.11\,(\,2.3 + (\,11-1)\,4) -$

$\frac{1}{2}.5\,(\,2.3 + (\,5-1)\,4) = \frac{1}{2}.11.46 - \frac{1}{2}.5.\,22 = 198$

SOAL LATIHAN 9.2

1. Tentukan rumus suku ke – n dari barisan aritmatika berikut ini , kemudian tentukan suku ke 10:
   a. 3, 6, 9, 12, 15,…
   b. 7, 9, 11, 13,15,…
   c 100, 99, 98, 97, …
   d. -5,-4,-3,-2,-1,…
   e. $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{51}{4},$
   f. 0,1, 0,2 , 0,3 , 0,4 ,0,5,…
2. Tentukan 7 suku pertama dari barisan aritmatika berikut ini
   a. a = 2 , b = 2
   b. a = 4 , b = -2
   c. a = 0,1 , b = 0,5
   d. a = 0,5 , b = 1
   e. a = $\sqrt{3}$, b = $\sqrt{3}$ +3
   f. a = 6 k , b = 8
   g. a = 3t -2 , b = 6t
3. Tentukan nilai n jika diketahui
   a. a = 4 , b = 2 , Un = 100
   b. a = 500 , b = -1 , Un = 196
   c. a = 5, b = 5 , Un = 225
   d. a = $\frac{1}{2}$, b = 1, Un = $\frac{51}{2}$
   e. a = 6, b = 3 , Un = 99

4. Hitunglah jumlah 10 suku pertama deret aritmatika berikut ini
   a. 4 + 9 + 14 +19+…
   b. 1 + 7 + 13 + 19+…
   c. 100 + 98 + 96 + 94 +…
   d. 0,1 + 0,2 + 0,3 + 0,4+…
   e. $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1, \ldots$
5. Jika suatu barisan aritmatika suku ke 10 adalah 40 dan suku ke 20 adalah 80. tentukan tiga suku pertama dari barisan itu dan rumus ke –n
6. Jika suatu barisan aritmatika suku ke 5 adalah 30 dan suku ke 25 adalah 70. Tentukan suku ke 35 dari barisan tersebut
7. Tentukan jumlah semua bilangan bulat :
   a. ganjil antara 300 dan 700
   b. genap antara 300 dan 700
   c. antara 200 dan 500 yang habis dibagi 4
   d. antara 200 dan 500 yang **tidak** habis dibagi 4
   e. antara 100 dan 1000 yang habis dibagi 4 **dan** 10
   f. antara 100 dan 1000 yang habis dibagi 4 **atau** 10
8. Tentukan suku ke-n dari deret aritmatika berikut jika diketahui
   a. $Sn = n^2 + 2n + 5$
   b. $Sn = 4n^2 + 14n$
9. Diketahui jumlah n suku pertama dari deret aritmatika adalah $Sn = 2n^2 + 2n - 10$. Tentukan 4 suku pertama dari barisan aritmatika tersebut

10. Dari suatu barisan aritmatika diketahui,suku kedelapan adalah 20 dan suku kesepuluh adalah 12. Carilah jumlah duapuluh suku yang pertama.
11. Suatu deret aritmatika mempunyai 21 suku dengan suku tengah 13.Jika jumlah suku-suku setelah suku tengah sama dengan 12 kali jumlah suku-suku sebelumnya ,maka tentukan deretnya.
12. Seorang petani memetik mangga setiap hari dan selalu mencatatnya Ternyata banyaknya mangga yang dipetik memenuhi barisan aritmatika yaitu banyak mangga yang dipetik pada hari ke-n memenuhi rumus Un = 10 n + 100. Tentukan banyak mangga yang dipetik selama 20 hari pertama.
13. Budi rajin menabung di bank BNI setiap bulan. Tahun pertama, ia menabung Rp 200.000,00 per bulan. Tahun kedua, ia menabung Rp 250.000,00 per bulan. Tahun ketiga, ia menabung Rp300.000,00 per bulan dan seterusnya setiap tahun bertambah Rp. 50.000,00. Jika dari hasil tabungan tersebut , budi ingin membeli mobil seharga 51 juta, pada tahun ke berapa budi dapat membeli mobil tersebut? (Bunga bank tidak ikut diperhitungkan)
14. Irfan seorang pedagang yang sukses. Keuntungannya berdagang selalu bertambah setiap bulan dengan jumlah yang sama. Bila keuntungan bulan ke 4 adalah Rp 3.200.000,00 dan keuntungan bulan ke 8 adalah Rp 4.800.000,00. Tentukan jumlah seluruh keuntungan Irfan pada bulan ke 10.
15. Koperasi “sumber rejeki “ memberikan hutang pada Doni sebesar Rp 10.000.000,00. Doni berjanji untuk membayar utangnya setiap bulan sebesar Rp 1.000.000,00 ditambah bunga 1 % per bulan dari sisa pinjamannya. Berapa jumlah bunga yang dibayarkan Doni ke koperasi “sumber rejeki “ sampai hutangnya lunas

7.3 BARISAN DAN DERET GEOMETRI

Perhatikan barisan – barisan berikut ini :

a. 2, 4,8, 16, 32, 64, 128,…

b. 2, -4,8, -16, 32, -64, 128,…

c. 1, 3, 9, 27, 81, 243,…

d. 1, $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \ldots$

Kalau kita perhatikan pola barisan – barisan diatas, untuk mendapatkan suku berikutnya diperoleh dengan mengalikan suatu angka (rasio) yang tetap dengan suku sebelumnya yaitu

a. Pada barisan 2, 4,8, 16, 32, 64, 128,…untuk mendapatkan suku berikutnya dikalikan dengan angka (rasio) 2. Jadi $U_n = 2\ U_{n-1}$

b. Pada barisan 2, -4, 8, -16, 32, -64, 128,…untuk mendapatkan suku berikutnya dikalikan dengan angka (rasio) -2. Jadi $U_n = -2\ U_{n-1}$

c. Pada barisan 1, 3, 9, 27, 81, 243,…untuk mendapatkan suku berikutnya dikalikan dengan angka (rasio) 3. Jadi $U_n = 3\ U_{n-1}$

d. Pada barisan 1, $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \ldots$untuk mendapatkan suku berikutnya dikalikan dengan angka (rasio) $\frac{1}{3}$. Jadi $U_n = \frac{1}{3}\ U_{n-1}$

Contoh – contoh barisan diatas biasa disebut barisan geometri

Definisi 7.3.1:

Barisan geometri adalah barisan yang ratio (perbandingan) antara dua suku berurutan adalah tetap. Secara umum barisan geometri mempunyai bentuk:

$$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \ldots\ldots\ldots\ldots, ar^{n-1}$$

Dimana a = U_1 adalah suku pertama,

r adalah ratio (perbandingan) antara dua suku berurutan yaitu

$r = \dfrac{Un}{Un-1}$

Kalau kita perhatikan definisi dari barisan geometri maka

Suku ke-1 = U_1 = a

Suku ke-2 = U_2 = $a\,r$

Suku ke-3 = U_3 = $a\,r^2$

Suku ke-4 = U_4 = $a\,r^3$

Suku ke-5 = U_5 = $a\,r^4$

Dan seterusnya, sehingga rumus suku ke-n dari barisan geometri adalah:

$$Un = a\,r^{\,n-1}$$

CONTOH 7.3.1 :

Tentukan rumus suku ke n dari barisan – barisan berikut :

a. $2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots$

b. $4, 4^2, 4^3, 4^4, 4^5, 4^6, \ldots$

c. $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$

Penyelesaian :

a. $a = U_1 = 2$ dan $r = \dfrac{-1}{2}$

$Un = a\,r^{n-1} = 2.\left(\dfrac{-1}{2}\right)^{n-1}$

Jadi rumus suku ke-n pada barisan 2, -1, $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}$, adalah :

$Un = 2. (\frac{-1}{2})^{n-1}$

b. $a = U_1 = 4$

$r = \frac{4^2}{4} = 4$

$Un = a\ r^{n-1}$

$= 4.\ 4^{n-1}$

$= 4^n$

Jadi rumus suku ke-n pada barisan 4, 4^2, 4^3, 4^4, 4^5, 4^6,…adalah $Un = 4^n$

c. $a = U_1 = -1$

$r = \frac{1}{-1} = -1$

$Un = a\ r^{n-1}$

$= -1. (-1)^{n-1}$

$= (-1)^n$

Jadi rumus suku ke-n pada barisan -1, 1, -1, 1, -1, 1,adalah $Un = (-1)^n$

CONTOH 7.3.2 :

Diketahui suatu deret geometri dengan $U_3 = \frac{1}{16}$ dan $U_6 = 4$

Tentukan rasio r dan suku pertama a

Penyelesaian :

$U_3 = a\,r^2 = \frac{1}{16}$

$U_6 = a\,r^5 = 4$

Jadi $r^3 = \frac{U_5}{U_3} = \frac{4}{1/16} = 64$ maka $r = 4$

Sehingga $a \cdot 4^2 = \frac{1}{16}$ diperoleh $a = \frac{1}{256}$

Berikut ini akan diberikan contoh penggunaan barisan geometri

CONTOH 7.3.3 :

Penduduk suatu daerah adalah 20.000 orang. Daerah tersebut setiap tahun penduduknya bertambah 2 %. Tentukan jumlah penduduk pada awal tahun ke -7.

Penyelesaian :

Jumlah penduduk pada awal tahun pertama adalah $U_1 = 20000$

Jumlah Penduduk pada awal tahun kedua adalah

$$\begin{aligned} U_2 &= U_1 + 2\,\% \,.\, U_1 \\ &= 1{,}02\, U_1 \\ &= 1{,}02 \times 20.000 \end{aligned}$$

Jumlah Penduduk pada awal tahun ketiga adalah

$$\begin{aligned} U_3 &= U_2 + 2\,\% \,.\, U_2 \\ &= 1{,}02\, U_2 \\ &= 1{,}02 \times 1{,}02 \times 20.000 \\ &= (1{,}02)^2 \times 20.000 \end{aligned}$$

Dan seterusnya sehingga :

Jumlah Penduduk pada awal tahun ke-n adalah

$U_n = (1{,}02)^{n-1} \times 20.000$

Jumlah Penduduk pada awal tahun ke-7 adalah

$U_7 = (1{,}02)^{6} \times 20.000$

$= 22.523{,}25$

Jadi Jumlah Penduduk pada awal tahun ke-7 sekitar 22.532 orang

DEFINISI 7.3.2

Deret geometri adalah jumlah dari suku-suku barisan geometri. Jika Sn adalah jumlah n suku pertama dari suku-suku barisan geometri, maka

$S_1 = U_1 = a$

$S_2 = U_1 + U_2 = a + a\,r$

$S_3 = U_1 + U_2 + U_3 = a + a\,r + a\,r^2$

$S_4 = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = a + a\,r + a\,r^2 + a\,r^3$

.

.

.

$Sn = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \ldots + U_n = a + a\,r + a\,r^2 + a\,r^3 + \ldots + a\,r^{n-1}$

Berdasarkan definisi diatas akan dicari bentuk umum dari jumlah n suku pertama dari suku-suku barisan geometri sebagai berikut

$r\,Sn = a\,r + a\,r^2 + a\,r^3 + \ldots + a\,r^{n-1} + a\,r^n$ ………(1)

$Sn = a + a\,r + a\,r^2 + a\,r^3 + \ldots + a\,r^{n-1}$ …………...(2)

Persamaan (1) – (2) diperoleh

$r\,Sn - Sn = a\,r^n - a$

$Sn\,(r - 1) = a\,(r^n - 1)$

$$Sn = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

Dengan cara yang sama jika Persamaan (2) – (1) diperoleh

$$Sn = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

Jadi, jumlah n suku pertama dari suku-suku barisan geometri dapat dinyatakan dalam rumus

$$Sn = \frac{a(r^n-1)}{r-1} \text{ atau } Sn = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

Dengan r $\neq 1$

CONTOH 7.3.4 :

Diberikan barisan geometri 2, -4,8, -16, 32, -64, 128,

Hitunglah jumlah 10 suku pertama deret tersebut

Penyelesaian :

a = 2

r = -2

$$Sn = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

$$S_{10} = \frac{2((-2)^n-1)}{-2-1} = \frac{2\,.\,1023}{-3} = -683$$

CONTOH 7.3.5 :

Dalam suatu deret geometri, Sn = $2^n + 5$. Tentukan rumus suku ke-n dari barisan geometri tersebut.

Penyelesaian :

$U_n = S_n - S_{n-1}$

$= 2^n + 5 - (2^{n-1} + 5)$

$$\begin{aligned} U_n &= 2^n - 2^{n-1} \\ &= 2^{n-1}(2-1) \\ &= 2^{n-1} \end{aligned}$$

Jadi rumus suku ke-n dari barisan geometri tersebut adalah $U_n = 2^{n-1}$

Sekarang perhatikan, jika nilai dari r adalah $-1 < r < 1$ dan n sangat besar maka r^n mendekati nilai 0. Hal ini biasa ditulis $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ sehingga

lim a r^n = 0 Akibatnya $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-r} - \lim_{n\to\infty} \frac{a\,r^n}{1-r} \\ &= \frac{a}{1-r} - 0 \\ &= \frac{a}{1-r} \end{aligned}$$

Sedangkan $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ melambangkan deret tak hingga dari barisan geometri yaitu

$$\lim_{n\to\infty} S_n = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + \ldots$$

Jadi, rumus jumlah deret geometri tak hingga adalah sebagai berikut

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = \frac{a}{1-r}, \text{ untuk } -1 < r < 1,\ r \neq 0$$

CONTOH 7.3.6:

Hitunglah $9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots$

Penyelesaian :

Deret $9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots$merupakan geret geometri tak hingga dengan a= 9 dan r = $\frac{1}{3}$ sehingga $\sum_{n=1}^{\infty} U_n = \frac{a}{1-r} = \frac{9}{1-\frac{1}{3}} = \frac{27}{2}$

Jadi $9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots = \frac{27}{2}$

SOAL LATIHAN 9.3

1. Tuliskan 4 suku pertama dari barisan geometri berikut ini :
   a. a = 2 , r = 3
   b. a = -2 , r = 2
   c. a = 8, r = 0,5
   d. a = 128, r = $\frac{1}{4}$
   e. a = 5 , r = -5
   f. a = 1000, r = 0,1

2. Tentukan rumus suku ke – n dari barisan geometri dibawah ini. Kemudian tentukan suku ke – 8 dan suku ke -12
   a. 2, 4, 8, 16,…
   b. -3, 6 , -12, 24
   c. 1, -1, 1, -1,…
   d. 5 , $5\sqrt{2}$, 10, $10\sqrt{2}$,…
   e. 80, 40, 20, 10,…
   f. 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{64}$,…

3. a. Tunjukkan bahwa suku tengah dari barisan geometri dengan banyaknya suku (2k -1) adalah U_k
   b. Dari soal a, Tunjukkan juga suku tengah U_k dapat dinyatakan dalam

$$U_k = \sqrt{U_1 . U_{2k-1}}$$

4. Tentukan suku tengah dari barisan geometri berikut ini :
   (Petunjuk : Gunakan rumus pada soal no 3)
   a. 16, 8, 4, …, $\frac{1}{16}$
   b. 4, 8,16, …, 612
   c. 1024, 612, 306,…, 2
   d. $\sqrt{5}, \sqrt{10}, 2\sqrt{5}, \ldots, 16\sqrt{5}$
   e. 1, -3, 9,…, -729
5. Tentukan U_{10} dari barisan geometri berikut ini jika diketahui :
   a. $r = 3$ dan $U_4 = 162$.
   b. $r = 2$ dan $U_5 = 160$
   c. $a = 5$ dan $U_3 = 500$
   d. $a = 8$ dan $U_4 = 64$
   e. $U_3 = 306$ dan $U_5 = 1024$
6. Diberikan suatu barisan geometri dengan $U_1 + U_4 = 4$ dan $U_2 + U_5 = 12$. Tentukan :
   a. Rasionya dan suku pertama
   b. suku ke -6
   c Rumus suku ke – n
7. Sisipkan 3 bilangan diantara 3 dan 243 sehingga membentuk barisan geometri. Kemudian tentukan rasio, suku pertama dan suku ke-8
8. Tentukan jumlah 7 suku pertama dari deret geometri berikut ini ;
   a. 3 + 6 + 12 + 24 + …
   b. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$
   c. 2 – 2 + 2 – 2 +…
   d. 3 + 9 + 27 + 81 +…

9. Tentukan rumus jumlah n suku pertama suatu deret geometri pada soal no 7
10. Jumlah n suku pertama suatu deret geometri ditentukan dengan Sn $= 3\,(\,2\,)^{n+1} - 5$

    Tentukan ;

    a. Suku pertama dan rasionya
    b. Rumus suku ke –n barisan itu
    c. $U_6 + U_7 + U_8 + U_9$
11. Hitunglah :
    a. 80 + 40+ 20 + 10 +…
    b. 0, 1 + 0.01 + 0.001 +…
    c. 640 +160 + 40 + 10 +…
    d. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$
12. Suatu jenis sepeda motor mengalami penurunan harga jual sebesar 4 % pada setiap akhir 1 tahun. Jika harga sepeda motor baru Rp 16.000.000,00 maka tentukan harga jual sepeda motor tersebut pada akhir tahun ke empat ?
13. Suatu rumah mengalami kenaikan harga jual sebesar 10% pada setiap akhir 1 tahun. Jika harga rumah Rp 150 juta maka tentukan harga jual rumah tersebut pada akhir tahun ke lima ?
14. Sebuah bola dijatuhkan dari ketinggian 40 meter dan memantul dengan ketinggian $\frac{3}{5}$ dari jarak ketinggian sebelumnya.Tentukan total jarak jatuh bola hingga bola berhenti bergerak.

ISBN 978-602-8320-73-3
ISBN 978-602-8320-75-7

Buku ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan (BSNP) dan telah dinyatakan layak sebagai buku teks pelajaran berdasarkan Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 45 Tahun 2008 tanggal 15 Agustus 2008 tentang Penetapan Buku Teks Pelajaran yang Memenuhi Syarat Kelayakan untuk digunakan dalam Proses Pembelajaran.

HET (Harga Eceran Tertinggi) Rp. 17,314.00